1　集合

定義 1 (集合 [1, p.260])**.** 集合とは，はっきりと区別できる「もの」の集まりである．集合 A を構成する「もの」を元または要素という．a が集合 A の要素であるとき，$a \in A$ と書き，a は A に属する（あるいは a は A に含まれる）という．a が A の要素でないときには，$a \notin A$ と書く．

集合を表すには，2 種類の記述法がある．1 つは，$\{1,3,5\}$ のように要素を並べて表す方法である．もう 1 つは，$\{x \mid 1 \le x \le 5 \wedge x \text{ は偶数}\}$ というように「もの」がその集合の要素になる条件を書く方法である．ただし，後者の記述法 $\{x \mid P(x)\}$ が本当に集合を表しているかは，以下で見るように注意が必要である．

定義 2. 自然数 $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$, 整数 $\mathbb{Z}$, 有理数 $\mathbb{Q}$, 実数 $\mathbb{R}$, 複素数 $\mathbb{C}$, 非負の実数 $\mathbb{R}^+$

例 3 (Russell の逆説 [2, p.2])**.** 自分自身に属さないすべての集合を要素とする集合

$$\{S \mid S \text{ は集合} \wedge S \notin S\}$$

を考える．

この集合を R とし，$P_1(S) = S \notin S$ とする．$R \notin R$ のとき，R が集合であり，$P_1(R)$ が成り立つことから，集合 R の定義より $R \in R$ である．一方，$R \in R$ のとき，$P_1(R)$ が成り立たないことから，集合 R の定義より $R \notin R$ である．

この逆説を避ける簡単な方法は，記述法 $\{x \mid P(x)\}$ における x を集合と分かっているものに制限することである．

定義 4 (単射，1 対 1[3, p.389])**.** 関数 $f : S \to T$ が次の条件を満たすとき，f を単射であるという．

$$s \neq s' \implies f(s) \neq f(s')$$

この条件の対偶は $f(s) = f(s') \implies s = s'$ である．

例 5. 恒等関数 $id(x) = x$ は単射である．実数上の関数 $f(x) = x^2$ は単射ではない．なぜなら，$-1 = 1$ だが $f(-1) = f(1)$ であるからである．任意の T に対して，関数 $e : \emptyset \to T$ は単射である．なぜなら単射の条件の前提が空に成り立つからである．

定義 6 (像 (image)[2, p.4(22)])**.** 関数の像（値域 (range)）とは，値の集合である．すなわち，$f : S \to T$ の像は $\{t \in T \mid \exists s \in S.\ f(s) = t\}$ である．

例 7. $x \mapsto x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の値域は非負の実数であるが，終域は $\mathbb{R}$ である．

定義 8 (全射 [3, p.336(345)])**.** 上への写像のことをいう．すなわち，写像 $f : A \to B$ は，各 $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる．$a \in A$ があるとき，全射という．

言い換えると，写像 $f : A \to B$ の像が B であるとき，f を全射という．

定義 9. S と T を集合とする．始域 S から終域 T へのすべての関数の集合を $\mathrm{Hom}(S,T)$ と書く．$f : T \to V$ を関数とする．

$$\mathrm{Hom}(S, f) : \mathrm{Hom}(S,T) \to \mathrm{Hom}(S,V)$$

は

$$\mathrm{Hom}(S, f)(g) = f \cdot g$$

と定義される．同様に，$h : W \to S$ を関数とすると，

$$\mathrm{Hom}(h,T) : \mathrm{Hom}(S,T) \to \mathrm{Hom}(W,T)$$

は

$$\mathrm{Hom}(h,T)(g) = g \cdot h$$

と定義される．

2　準備

定義 10 (半群 (semigroup))**.** 半群 $(M, \cdot)$:

- (台) 集合 M
- M 上の 2 項演算 $\cdot$
  - 全域的: $\forall x, y. \exists z.\ z = x \cdot y$
  - 結合的: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

定義 11 (モノイド (monoid))**.** モノイド $(M, \cdot, e)$:

- (台) 集合 M
- M 上の 2 項演算 $\cdot$
  - 全域的: $\forall x, y. \exists z.\ z = x \cdot y$
  - 結合的: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  - 単位的: $x \cdot e = e \cdot x = x$

モノイドは単位元をもつ半群である．

例 12 (モノイドの例)**.** モノイドであることを示すには，全域的，結合的，単位的であることを確かめればよい．

- $(A, +, 0)$, ここで A は，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 2 の倍数, 3 の倍数，..., $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ など
- $(A, \cdot, 1)$, ここで A は，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, これらを正の数に制限したもの，$\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ でも良い．
- (Haskell のリスト, ++, [ ])
- $(\mathbb{B}, \wedge, \mathit{false})$, $(\mathbb{B}, \vee, \mathit{true})$
- $(\mathcal{P}(A), \cup, \emptyset)$, $(\mathcal{P}(A), \cap, A)$
- $(A, \max, -\infty)$, $(A, \min, \infty)$

以下はモノイドではない．

- $(\{0,1,2\}, \cdot, 1)$, $2 \cdot 2$ は台集合に含まれないので全域的ではない．

定義 13 (モノイド準同型写像)**.** モノイド $(M, \cdot, e)$ からモノイド $(M', \cdot', e')$ へのモノイド準同型写像は以下を満たす関数 $f : M \to M'$ である：

$$f(e) = e' \tag{1}$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y) \tag{2}$$

例 14. モノイド準同型写像

$$\begin{array}{lcl} \mathit{length} & : & ([A], +\!\!+) \to (\mathbb{N}, +) \\ \mathit{length}\,[\,] & = & 0 \\ \mathit{length}\,(a : x) & = & a + \mathit{length}\ x \end{array}$$

例 15. モノイド準同型写像

$$\begin{array}{lcl} f & : & (\mathbb{N}, +) \to (\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}, \cdot) \\ f(x) & = & 2^x \end{array}$$

定義 16 (自由モノイド)**.** ...

足し算 (+), 引き算 (−), かけ算 (×) ができる代数系を環という.

定義 17 (環)**.** 集合 R に加法 + と乗法 · が定義され，以下の環の公理を満足するとき $(R, +, \cdot)$ を環という.

1. R は加法に関して加群である．すなわち，以下の条件を満足する.
   - R の任意の 2 元 a, b に対して $a + b = b + a$ が成り立つ.
   - + の結合律が成り立つ: $(x + y) + z = x + (y + z)$
   - 任意の元 $a \in R$ に対して零元が存在する: $0 + a = a + 0 = a$
   - + に関する逆元が存在する: $a^{-1} + a = a + a^{-1} = 0$
2. 積 · は次の性質を持つ.
   (a) 結合律: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
3. (分配律) 任意の元 $a, b, c \in R$ に対して

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{3}$$
$$(b + c) \cdot a = c \cdot a + b \cdot c \tag{4}$$

定義 18 (群 [3, p.178])**.** 次の条件を満たす二項演算 ·, 単項演算 $^{-1}$, 要素 e を伴った集合 G を群 $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ と呼ぶ:

1. 結合性: $\forall a, b, c \in G.\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. 単位元の存在: $\forall a \in G.\ a \cdot e = e \cdot a = a$
3. 逆元の存在: $\forall a.\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

例 19 (群の例)**.** 以下のモノイドは群である.

- $(A, +, 0)$, ここで A は，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 2 の倍数, 3 の倍数，..., $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ など
- $(A^*, \cdot, 1)$, ここで A は $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $(\mathbb{B}, \wedge, \mathit{false})$, $(\mathbb{B}, \vee, \mathit{true})$

以下のモノイドは群ではない.

- (Haskell のリスト, ++, [ ]). たとえば，[1] の左逆元が存在しない．すなわち，$a +\!\!+ [1] = [\,]$ となる a が存在しない.
- $(\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \cdot, 1)$. たとえば，2 の左逆元が存在しない．すなわち，$a +\!\!+ 2 = 1$ となる a が存在しない.
- $(\mathcal{P}(A), \cup, \emptyset)$, $(\mathcal{P}(A), \cap, A)$
- $(A, \max, -\infty)$, $(A, \min, \infty)$

表 1 群に似た構造の比較 (cf. Wikipedia マグマ (数学))

	全域的	結合的	単位的	可逆的
群	○	○	○	○
モノイド	○	○	○	×
半群	○	○	×	×
マグマ	○	×	×	×

3 領域理論

定義 20 (全順序 (total order)[1])**.** 集合 D 上の二項関係 ≤ で次の性質を満たすものを D 上の全順序と呼ぶ.

- $a \leq b \vee b \leq a$ (完全律)
- $a \leq b \wedge b \leq a \ \Rightarrow\ a = b$ (反対称律)
- $a \leq b \wedge b \leq c \ \Rightarrow\ a \leq c$ (推移律)

定義 21 (全順序集合)**.** 全順序 ≤ が定義されている集合 A を全順序集合と呼び，$(A, \leq)$ と表す.

例 22 (全順序集合の例)**.**

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- 前項の ≤ を ≥ に変えたもの
- 英単語の集合と辞書順
- 勝利数と得点の組の辞書式順序 (サッカーのリーグ選の順位)

例 23 (全順序でない例)**.**

- 自然数 $\mathbb{N}$ と大小関係 <(同様に，整数 $\mathbb{N}$, 有理数 $\mathbb{Q}$, 実数 $\mathbb{R}$)
  - 推移律を満たすが，完全律と反対称律を満たさない
- 前項の < を > に変えたもの

定義 24 (半順序 (partial order))**.** 集合 D 上の二項関係 ≤ で次の性質を満たすものを D 上の半順序と呼ぶ.

- $a \leq a$ (反射律)
- $a \leq b \wedge b \leq a \ \Rightarrow\ a = b$ (反対称律)
- $a \leq b \wedge b \leq c \ \Rightarrow\ a \leq c$ (推移律)

命題 25. 全順序は半順序である.

証明. 完全律において $a = b$ であるとき，$a \leq a \vee a \leq a$, つまり反射律 $a \leq a$ が成り立つ. □

定義 26 (半順序集合 (partially ordered set))**.** 半順序が定義されている集合を半順序集合と呼ぶ.

このような structured sets を用いて圏を定義することは多い.

例 27 (半順序集合の例)**.**

- 集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と半順序 $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_2 \leq y_2$.
- 集合と包含関係 ⊆
- $a \leq b \Leftrightarrow a$ が b を割り切る.

[1] 線形順序ともいう.

人を集合として，人の「年齢の大小」を表す二項関係を考える．同じ年齢の人が同一の人ではない．したがって，この二項関係は，反対称律を満たさないので，半順序ではない．

定義 28 (束 (lattice)[4])**.** 半順序集合 L の元 x, y に対して $\{x, y\}$ の上限，下限が存在するとき，これらをそれぞれ x, y の結び (join), 交わり (meet) と呼び，$x \sqcup y, x \sqcap y$ で表す．L の任意の 2 元が結びと交わりを持つとき，L を束という．

定義 29 (上界 (upper bound))**.** D を半順序集合，X を D の部分集合とする．元 $d \in D$ について，

$$\forall x \in X (x \sqsubseteq d)$$

のとき d は X の上界であるといい，$X \sqsubseteq d$ と書く．

定義 30 (最小上界 (least upper bound)[2])**.** d が X の上界のうち最小の元であるとき，d を X の最小上界と呼ぶ．

定義 31 (最小元 (least element, bottom))**.** 半順序集合 D 上の最小元とは，次の条件を満たす元 m のことである．

$$\forall a \in D (m \sqsubseteq a)$$

半順序集合 D の最小限を $\bot_D$ で表す．D が明らかな場合は，省略して単に $\bot$ と書くこともある．

定義 32 (完備束 [5, p.63])**.** 半順序集合 D において，すべての部分集合 $X \subseteq D$ について上限 $\sqcup X \in D$ が存在するとき，D を完備束と呼ぶ．

完備束は常に最小元 ($\sqcup\emptyset$) と最大元 ($\sqcup D$) を持つ [5, p.63].

例 33 (束)**.**

- 任意の集合 A の巾集合，包含関係 $\subseteq$ の定める順序に関して束となる．最大限は A, 最小元は空集合．有界束，完備束．
- $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$: 最小元は $(0, 0)$, 最大元はない．完備束．
- $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq)$: 最小元はない．最大元はない．空集合の上限が存在しないので，完備束ではない．

例 34 (前順序 (preorder)[3] [5, p.141])**.** 反射律と推移律を満たす二項関係を前順序と呼ぶ．

- $a \leq a$ (反射律)
- $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (推移律)

半順序は前順序である．

例 35 (前順序の例)**.** グラフ上の到達可能性関係は前順序になる．$x \leq y$ はノード x からノード y へのパスがあることを示す．$x \leq y$ かつ $y \leq x$ であっても，x と y は同じノードとは限らない．

「グー・チョキ・パーの強さの比較」は，推移律が満たされないので，前順序を表さない．

[2] 上限 (supremum) とも呼ばれる．

[3] 擬順序 (pseudo order) とも呼ぶ．

4 圏

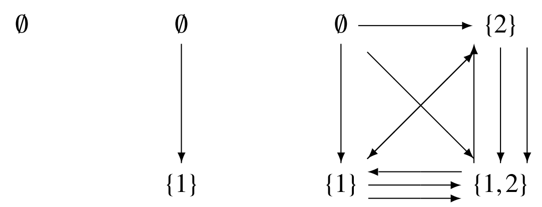
圏論は，関数の上の代数を研究する数学の一分野である．

定義 36 (圏 (category)[5, p.137][6, p.1])**.** 圏 C は次の要素からなりたつ．

1. 対象 (object) の集まり．
2. 射[4](arrow) の集まり．
3. 各射 f に対して，始域 (domain) とよばれる対象 $\mathrm{dom}(f)$ と終域 (codomain) と呼ばれる対象 $\mathrm{cod}(f)$ が割り当てられている．射 f について，$\mathrm{dom}(f) = A$ で $\mathrm{cod}(f) = B$ のとき，$f : A \to B$ と表し，f は A から B への射であると読む．また，対象 A から B への射の全体を $C(A, B)$ と表す．
4. 各射 $f : A \to B, g : B \to C$ に対して，合成射 (composite arrow)$f \cdot g : A \to C$ が定義されている．$\cdot$ は結合則を満たす．すなわち，任意の $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ について，$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$ が成り立つものとする．すなわち $\cdot$ は結合則を満たす．
5. 各対象 A に対して，恒等射 $id_A : A \to A$ が定義されている．また，任意の射 $f : A \to B$ について，$id_B \cdot f = f = f \cdot id_A$ が成り立つものとする．

対象のクラス $\mathrm{Ob}(C)$, 射のクラス $\mathrm{Mor}(C)$.

例 37 (集合圏 **Set**)**.** Ob は有限集合，Mor は全域関数．(恒等射は省略してある．以下同様．)



各射には，対象 $\mathrm{dom}(f)$ と $\mathrm{cod}(f)$ が備わっていることに注意せよ．例えば，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ である全域関数 $f(x) = x^2$ と，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ である全域関数 $f(x) = x^2$ は，圏 **Set** の異なる射であることに注意せよ．(cf. [6])

例 38 ([7, p.5])**.** Ob は有限集合，Mor は単射関数．

例 39 ([7, p.5])**.** Ob は有限集合，Mor は任意の $b \in B$ について $f^{-1}(b)$ がたかだか 2 つの要素であるような関数 $f : A \to B$

例 40 (空圏 **0**(empty category)[7, p.8])**.** $\mathrm{Ob} = \emptyset, \mathrm{Mor} = \emptyset$. 空圏 **0** から任意の圏へただ 1 つの関手が存在する．

$\emptyset$ のみを対象とする集合圏 **Set** とは異なることに注意せよ．

例 41 (**1**, **2**, **3**, **4**, **5** [7, p.8])**.** 以下のような要素が **1**, **2**, **3**, **4**, **5** の圏．

$$* \qquad\qquad * \longrightarrow \star$$

[4] morphism とも呼ばれる

$$\begin{tikzcd} \ast \arrow[r] \arrow[dr] & \bigstar \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ast \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bigstar \arrow[d] \arrow[dl] \\ \dagger & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \ast \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\ \flat & & \bigstar \arrow[ll] \arrow[dll] \arrow[d] \\ \dagger \arrow[u] & & \bullet \arrow[ull] \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

これらの圏は全順序に対応する．一般化して圏 $\mathbb{N}$ が定義できる [6, p.10].

例 42. 以下は，$\ast$ から $\bullet$ への射が無いので圏ではない．

$$\begin{tikzcd} \ast \arrow[r] & \bigstar \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ast \arrow[r] \arrow[d] & \bigstar \arrow[d] \arrow[dl] \\ \dagger & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$$

例 43 (行列 [8, p.11])**.** 環 K を要素に持つ正方行列．射 $A : m \to n$ は $m \times n$ 行列 A.

例 44 (モノイド圏 **Mon**[6, p.6])**.** 対象はモノイド，射はモノイド準同型写像.

モノイド圏 $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ では，0 以外のすべての実数が同型射である．

例 45 (ベクトル空間の圏)**.** 対象はベクトル，射は線形写像（足し算と定数倍を保つ）：

$$F(\bar{x} + \bar{y}) = F(\bar{x}) + F(\bar{y}) \tag{5}$$

$$F(k\bar{x}) = kF(\bar{x}) \tag{6}$$

例 46 (グラフの圏)**.** 対象はグラフ，射はグラフ準同型

例 47 (双対圏 (dual category[5]) [5, p.142][6, p.8])**.** C を任意の圏として，C の射の矢印の向きを反対にした，双対圏と呼ぶ圏を定義し，C^{op} と表す.

疑問：集合圏に双対圏はあるのか？（空集合への射がない）

定義 48 (半順序 $\sqsubseteq_D$)**.** D に属する a, b について

$$a \sqsubseteq b \;\Leftrightarrow\; a = \bot \lor a = b$$

となる半順序 $\sqsubseteq_D$ を定義する．

定義 49 (単調関数 (monotone function)[6])**.** $(D, \sqsubseteq_D)$ と $(D', \sqsubseteq_{D'})$ を半順序集合として，関数 $f : D \to D'$ について，

$$\forall a \in D \forall b \in D (a \sqsubseteq_D b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq_{D'} f(b))$$

が成り立つとき，f を単調関数と呼ぶ.

定義 50 (有向集合 (directed set))**.** 半順序集合 D の空でない部分集合 X で，

$$\forall a \in X \forall b \in X \exists c \in X (a \sqsubseteq c \land b \sqsubseteq c)$$

が成り立つとき，X は有向集合であるという．

定義 51 (cpo, 完備半順序集合 (complete partially ordered set)[5, p.64])**.** 次の 2 つの条件を満たす半順序集合 D を cpo と呼ぶ.

1. D は最小元を持つ.
2. D は任意の有向部分集合 X について, X の最小上界 $\sqcup X \in D$ が存在する.

例 52 ([5, p.65])**.** 任意の集合 S の巾集合 $\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$ は，集合の包含関係 $\subseteq$ に関して cpo になる．

例 53 ([5, p.65])**.** 集合 S から集合 T への部分関数の全体は cpo になる．ただし，半順序 $f \sqsubseteq g$ は，任意の $x \in S$ に対して $f(x)$ が定義されれば $g(x)$ も定義され $f(x) = g(x)$ のように定義する．これは，以下のように言い換えることができる．

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in S.\ f(x) \sqsubseteq g(x) \tag{7}$$

定義 54 (連続 (continuous), [5, p.70])**.** D と D' を cpo として，関数 $f : D \to D'$ が連続であるとは，任意の有向集合 $X \subseteq D$ について，$\{f(x) \mid x \in X\}$ の最小上界が存在して，

$$f(\sqcup X) = \sqcup \{f(x) \mid x \in X\}$$

が成り立つことである．

命題 55 ([5, p.72])**.** cpo 上の連続関数は常に単調である．

証明. cpo 上の連続関数 f について，$a \sqsubseteq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq f(b)$ を示す．$f(a) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b) \sqsubseteq f(a \sqcup b) \sqsubseteq f(b)$. □

例 56 (**Poset**)**.** 対象は半順序集合，射は単調関数.

射が単調関数でないような対象が半順序集合である圏はない [9, p.6].

例 57. 半順序集合 $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ を考える．対象は実数 $\mathbb{R}$，射は $\leq_{\mathbb{R}}$ についての単調関数．線形順序の **Poset** である．id が単調であることは，任意の a, a' について，$a \leq a' \Leftrightarrow id(a) \leq id(a')$ であることより言える．合成が定義されることは，単調関数 f, g について，任意の a, a' に対して，$a \leq a' \Rightarrow f(a) \leq f(a') \Rightarrow g(f(a)) \leq g(f(a')) \Leftrightarrow (g \circ f)(a) \Leftrightarrow (g \circ f)(a')$ より言える．双対圏は $(\mathbb{R}, \geq_{\mathbb{R}})$.

例 58 (圏 **Poset** の例 (要チェック))**.** 集合 X を考える．対象は巾集合 $\mathcal{P}(X)$，射は集合の含有 $\subseteq$．双対圏では射は $\supseteq$.

例 59 (**CPO**)**.** 対象は cpo，射は連続関数.

cpo は半順序集合．**CPO** は **Poset** の部分圏.

[5] opposite category ともいう．
[6] order-preserving ともいう．

定義 60 (ストリクト関数 (strict function), [5, p.88])**.** 最小元を最小元に移すような関数をストリクト関数と呼ぶ．すなわち，$f : D \to D'$ がストリクト関数であるとは，$f(\perp_D) = \perp_{D'}$ が成り立つことである．

例 61 (**CPO**$_\perp$)**.** 対象は cpo，射はストリクトな連続関数．

以下のように concrete category ではないものもある．

例 62 (半順序圏 [5, p.141])**.** 半順序集合 $(P, \le_P)$ によって圏が定義される．対象は P．P の元 a, b について，$a \le_P b$ のとき a から b への射がただ 1 つ存在するとする．

同様に全順序圏，前順序圏 [5, p.141] が定義される．

例 63 (半順序集合の圏の例 [6, p.9])**.** 任意の集合は，その要素間に半順序が定義されていない半順序集合と見なせる．したがって任意の集合は，半順序圏の部分圏であると考えられる．

例 64 (**Finord**[8, p.12])**.** 対象は順序数，射は $f : m \to n$.

定義 65 (位相空間 (topologial space)[5, p.74])**.** 一般に X を空でない集合，$\mathcal{O}$ を X の部分集合の集まりで，次の条件を満たすものとする．

1. $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
2. $U, V \in \mathcal{O}$ ならば $U \cap V \in \mathcal{O}$
3. $U_i \in \mathcal{O}(i \in I)$ ならば $\cup\{U_i \mid i \in I\} \in \mathcal{O}$

このとき，$(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{O}$ を位相 (topology), 各 $U \in \mathcal{O}$ を開集合 (open set) と呼ぶ．また，f を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から $(X', \mathcal{O}')$ への関数として，任意の $U \in \mathcal{O}'$ について，$\{x \in X \mid f(x) \in U\} \in \mathcal{O}$ のとき f は連続であると呼ぶ．

定義 66 (開集合圏 [7, p.10])**.** 次の前順序を用いる．$x \le y \Leftrightarrow (x \in U \Rightarrow y \in U)$ for every open set U.

定義 67 (離散圏 (discrete category)[7, p.10])**.**

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \cdots$$

例 68 (**Rel**[7, p.7])**.** 対象は集合，射は関係．すなわち，

1. 対象は集合
2. 射は $f \subseteq A \times B$
3. 各射 f に対して，対象 $\mathrm{dom}(f)$ と $\mathrm{codom}(f)$ がある．
4. 任意の $f \subseteq A \times B$ と $g \subseteq B \times C$ に対して，合成射 $g \circ f = \{\langle a, c\rangle \in A \times C \mid \exists b(\langle a, b\rangle \in f \wedge \langle b, c\rangle \in g)\}$．結合則も満たす．
5. 恒等関係が恒等射.

例 69 (行列の圏 [7, p.7])**.** 対象はベクトル，射は行列とベクトルのかけ算．恒等射は単位行列．射の合成は行列の積.

例 70 (行列に関する圏その 2[6, p.10])**.** 対象は $\mathbb{N}$，射 $f : m \to n$ は $m \times n$ 実数行列．恒等射は単位行列．射の合成は行列の積.

例 71 (証明の圏 [7, p.10])**.** 対象は formula，射は deduction.

例 72 (直積圏 (product category)[5, p.142])**.** $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を任意の圏として，新しく圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ を定義し，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の直積圏と呼ぶ.

1. 対象は対象 $A : \mathcal{C}$ と $B : \mathcal{D}$ の組 $\langle A, B\rangle$
2. (A, B) から (A', B') への射は，$\mathcal{C}$ の射 $f : A \to A'$ と $\mathcal{D}$ の射 $g : B \to B'$ の組 $\langle f, g\rangle$
3. 合成射 $\langle h, i\rangle \circ \langle f, g\rangle$ は $\langle h \circ f, i \circ g\rangle$
4. 対象 $\langle A, B\rangle$ 恒等射 $id_{\langle A, B\rangle}$ は $\langle id_A, id_B\rangle$

例 73 ([5, p.20])**.** 半順序集合 $(P_1, \sqsubseteq_1)$ と $(P_2, \sqsubseteq_2)$ から半順序集合 $(P_1 \times P_2, \sqsubseteq)$ が作れる．ただし，

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff a \le_1 c \wedge b \le_2 d$$

である．この半順序集合は新たな圏と見なすことができる．

例 74 ([5, p.20])**.** 圏 **Poset** の対象 $(P_1, \sqsubseteq_1)$ と $(P_2, \sqsubseteq_2)$ の直和は，$(P_1 + P_2, \sqsubseteq)$ である．ただし，

$$(a, i) \sqsubseteq (b, j) \iff i = j \wedge a \sqsubseteq_i b$$

である．

定義 75 (**Set** の射の圏 $\mathbf{Set}^{\to}$ [6, p.9])**.** 対象は **Set** の射, $f : A \to B$ から $f' : A' \to B$ の射は $f' \cdot a = b \cdot f$ となるような **Set** の射 $a : A \to A'$ と $b : B \to B'$ の組 (a, b). 射 $(a, b) : (f : A \to B) \to (f' : A' \to B')$ と射 $(a', b') : (f' : A' \to B') \to (f'' : A'' \to B'')$ 合成射は $(a', b') \cdot (a, b) = (a' \cdot a, b' \cdot b)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "f'"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\
B \arrow[r, "b"'] & B' \arrow[r, "b'"'] & B''
\end{tikzcd}$$

恒等射は (id, id).

Set だけでなく，一般に，$\mathcal{C}$ 上の射の圏を定義できる．

例 76 (群の圏 **Grp**[8, p.11][6, p.10])**.** 群 $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ は圏と見なせる．1 つの対象．射は G の要素．e が恒等射．$\cdot$ は射の合成.

全ての射が同型射である．

定義 77 (部分圏 (subcategory) [5, p.139])**.** 圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ について，次の 4 つの条件が成り立つとき，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{D}$ の部分圏であるという．

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$
2. $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$. $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.
$$\mathrm{dom}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathcal{D}}(f), \qquad \mathrm{cod}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{cod}_{\mathcal{D}}(f)$$
3. $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ について，
$$g \cdot_{\mathcal{C}} f = g \cdot_{\mathcal{D}} f.$$
4. $\mathcal{C}$ の任意の対象 A について，$id_A^{\mathcal{C}} = id_A^{\mathcal{D}}$.

例 78 (部分圏の例 [5, p.139])**.**

- **CPO**$_\perp$ ⊂ **CPO** ⊂ **Poset**
- **Finord** ⊂ **Finset** ⊂ **Set**

定義 79 (関手 (functor) [5, p.175][8, p.13][7, p.8])**.** 次の条件を満たし, 対象を対象に, 射を射に移すものを（共変）関手 $F : C \to \mathcal{D}$ と呼ぶ.

1. $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
3. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

始域と終域の圏が一致する関手を自己関手 (endofunctor) という.

直観的には，関手は，圏の構造である dom, cod, ∘, id を保存する写像であるといえる ([5, p.176]).

例 80 (関手の例)**.** 関手 $\mathcal{P}$: **Set** → **Set**: 集合 X に巾集合 $\mathcal{P}\ X$ を割り当てる．射 $f : X \to Y$ は $\mathcal{P}\ f : \mathcal{P}\ X \to \mathcal{P}\ Y$ に移される．射 $\mathcal{P}\ f$ は $S \subseteq X$ を $f\ S \subseteq Y$ に移す．$\mathcal{P}\ id_X = id_{\mathcal{P}\ X}$, $\mathcal{P}\ (f \cdot g) = \mathcal{P}\ f \cdot \mathcal{P}\ g$ が成立する.

例えば,

$$\begin{array}{rcl} f\,0 &=& 1 \\ f\,1 &=& 2 \\ f\,2 &=& 0 \end{array}$$

のとき,

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{P}\ f\ \{\} &=& \{\} \\ \mathcal{P}\ f\ \{0\} &=& \{1\} \\ \mathcal{P}\ f\ \{1\} &=& \{2\} \\ \mathcal{P}\ f\ \{2\} &=& \{0\} \\ \mathcal{P}\ f\ \{0,1\} &=& \{1,2\} \\ \mathcal{P}\ f\ \{0,2\} &=& \{1,0\} \\ \mathcal{P}\ f\ \{1,2\} &=& \{0,2\} \\ \mathcal{P}\ f\ \{0,1,2\} &=& \{0,1,2\} \end{array}$$

となる.

忘却関手 (forgetful functor) は対象の構造を抽象する [6, p.37]. たとえば，忘却関手 U : **Mon** → **Set** はモノイド $(M, \cdot, e)$ を集合 M に，モノイド準同型射 $h : (M, \cdot, e) \to (M', \cdot', e')$ を対応する関数 $h' : M \to M'$ に移す．$U(h_1 \cdot h_2) = U(h_1) \cdot' U(h_1) = h'_1 \cdot' h'_2$, $U(id) = id$.

任意の圏 C について，恒等関手 (identity functor)I_C は対象と射をそれら自身に移す [6, p.37].

A を伴った右直積関手 (right product (with A) functor): $(-\times A) : C \to C$.

定義 81 (濃度 (cardinality)[3, p.463])**.** 集合 A の濃度 $|A|$ を以下のように定義する：

- A が n 個の元からなる有限集合の場合: n
- A が空集合 $\emptyset$ の場合: 0
- A が自然数全体の集合 $\mathbb{Z}$ の場合: $\aleph_0$
- A が実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の場合: $\aleph_1$

2 つの集合の間に全単射 (1 対 1 の対応) があるとき，かつこのときに限って，これらの集合の濃度は一致する.

2 つの集合 A, B について，A から B への単射が存在するとき（すなわち，A が B のある部分集合と 1 対 1 の対応があるとき)，$|A| \leq |B|$ と表す．$|A| \leq |B|$ かつ $|A| \neq |B|$ であるとき，$|A| < |B|$ と表し，A の濃度は B の濃度より真に小さいという.

例 82. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の濃度, 偶数の集合の濃度はすべて $\aleph_0$ である.

定義 83 (小さい圏)**.** 対象の集まりと射の集まりが「集合」[7]である圏を，小さいという.

Set は小さくない．集合から集合への関数は集合ではないからである[8].

例 84 (**Cat** [5, p.177][6, p.38])**.** 対象は小さい圏，射は関手.

ラッセルの逆理と同じ矛盾を避けるため，**Cat** は小さい圏だけを対象とする．**Cat** の対象の全体は集合ではないクラスとなる．したがって **Cat** 自体は小さい圏ではない.

定義 85 (局所的に小さい圏 (locally small category)[7, p.25])**.** 圏 C 中の任意の対象 X, Y に対して，$\mathrm{Hom}_C(X,Y) = \{f \mid f : X \to Y, f \in \mathrm{Mor}(C)\}$ が Hom 集合であるとき，圏 C を局所的に小さいという.

$\mathrm{Hom}_C(X,Y) = Y^X$ は X から Y への関数の集合であるので，**Set** は局所的に小さい．**Cat** の射は関手 $F : C \to \mathcal{D}$ であり，始域と終域と圏がことなり，Hom 集合にならないので，**Cat** は局所的に小さくなく大きい (?).

実数 $\mathbb{R}$ は，半順序集合の圏と見なせるが，小さいが具体的 (concrete) ではない．**Poset** は，具体的だが小さくない．具体的とは対象が (structured) sets であること.

定義 86 (同型 (isomorphic)[5, p.147])**.** 射 $f : A \to B$ について，ある射 $f^{-1} : B \to A$ が存在して,

$$f^{-1} \circ f = id_A, \qquad f \circ f^{-1} = id_B$$

が成り立つとき，f は可逆 (invertible)[9]であるという．2 つの対象 A と B の間に可逆な射が存在するとき，A と B は同型であるといい，$A \cong B$ と表す.

Set では全単射と同型射は一致する．しかし，一般には，monic かつ epic でも同系とは限らない．圏としての半順序集合を考える．a から b への射は monic かつ epic である．しかし，$a \sqsubseteq b$ かつ $b \sqsubseteq a$ ならば $a = b$ なので，対象 a と b が $a \neq b$ のとき，同型でない [5, p.148][6, p.16, 1.2.10 Exercises 6]．どうやら逆写像が存在しない場合がヒントになりそうだ.

命題 87 ([6, p.16])**.** f が同型射であるならばその可逆射はただ一つ存在する.

[7] 濃度が $\aleph_0$ である.
[8] 濃度が $\aleph_1$ である.
[9] 同型射 (isomorphism) と呼ぶこともある.

証明. f の可逆射 g, g' があったとする．

$$
\begin{aligned}
& g \\
= & \ \{ \text{identity} \} \\
& g \cdot id \\
= & \ \{ g \text{ is invertible} \} \\
& g \cdot (f \cdot g') \\
= & \ \{ \text{associativity} \} \\
& (g \cdot f) \cdot g' \\
= & \ \{ g \text{ is invertible} \} \\
& id \cdot g' \\
= & \ \{ \text{identity} \} \\
& g'
\end{aligned}
$$

したがって $g = g'$ である． □

命題 88 ([6, p.16])**.** $f^{-1} \cdot g^{-1}$ は $g \cdot f$ の可逆射である．

証明.

$$
\begin{aligned}
& (f^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot f) \\
= & \ \{ \text{associativity} \} \\
& (f^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot g)) \cdot f \\
= & \ \{ g \text{ is invertible} \} \\
& (f^{-1} \cdot id) \cdot f \\
= & \ \{ \text{identity} \} \\
& f^{-1} \cdot f \\
= & \ \{ f \text{ is invertible} \} \\
& id
\end{aligned}
$$

$(g \cdot f) \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1})$ も同様である． □

定義 89 (自然変換 (natural transformation), [5, p.178])**.** 2 つの関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が与えられているものとする．$\mathcal{C}$ の各対象 A について，$\mathcal{D}$ の射 $\mu_A : F(A) \to G(A)$ が割り当てられ，$\mathcal{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ について，$G(f) \circ \mu_A = \mu_B \circ F(f)$ が成り立っているとする．この割り当て μ を F から G への自然変換と呼び，$\mu : F \longrightarrow G$ のように表す．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
B & F(B) \arrow[r, "\mu_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

さらに，$\mathcal{C}$ の各対象 A について，μ_A が $\mathcal{D}$ で同型射であるとき，μ を自然同型変換 (natural isomorphism) と呼び，$\mu : F \cong G$ と表す．

例 90 (圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$[10, p.2])**.** 対象は型 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の関手，射は自然変換．

定義 91 (自己関手 (endofunctor))**.** 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{C}$ への関手を自己関手という．

同型の定義を弱めると，次のセクション・レトラクションが定義される．

定義 92 (レトラクト (retract)，セクション (section))**.** 射 $s : A \to B, r : B \to A$ について，$r \circ s = id_A$ が成り立つとき，s を r のセクション，r を s のレトラクションという．また，A を B のレトラクトという．

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "r"] & \\
A \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "id_A"'] & & A
\end{tikzcd}
$$

- 直観的には，B が A を取り出せる形で含んでいることを表している．
- 関手はレトラクトを保つ．
- $\underset{\sim}{\mathrm{Set}}$ において，レトラクト $r : A \to B$ によって，集合 B は互いに素な集合に類別される．

命題 93. 射 $r : A \to B$ のセクション s が存在するとは，任意の対象 X と射 $f : X \to A$ について

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "r"] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & A
\end{tikzcd}
$$

が可換となるような射 $g : X \to B$ が存在することである．

証明. ($\Rightarrow$) セクション s があるならば，$g = s \circ f$ がある．

($\Leftarrow$) $X = A, f = id_A$ であるとき，$g \circ r = id_A$ であるから，g は r のセクションである． □

円板 D^2 とその縁 S^1 を考える．D^2 は S^1 を含んでいる．しかし，D^2 に穴を空けずに S^1 に変形することができないので，S^1 は D^2 のレトラクトではない．

定義 94 (モノモルフィズム (monomorphism) [5, p.145][6, p.14])**.** 射 $f : A \to B$ に関して，任意の射の組 $h, h' : C \to A$ について，$f \cdot h = f \cdot h'$ ならば $h = h'$ であるとき，f はモニック (monic) であるという．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

双対はエピック (epic)．

定義 95 (エピモルフィズム (epimorphism) [5, p.147])**.** 射 $f : B \to A$ に関して，任意の射の組 $h, h' : A \to C$ について，$h \cdot f = h' \cdot f$ ならば $h = h'$ であるとき，f はエピック (epic) であるという．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "h'"'] & C
\end{tikzcd}
$$

射がエピックかつモニックでも同型とは限らない．例えば，$f : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$. **Mon** では，エピックであっても全射ではない [6, p.14].

命題 96 ([6, p.13])**.** **Set** のモノモルフィズムは単射関数である．

証明. **Set** の射 $f : B \to C$ を考える．証明したいのは「f がモニック $(f \cdot h = f \cdot h' \Rightarrow h = h') \Leftrightarrow f$ は単射 $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$」である．

($\Leftarrow$): 対偶を示す．すなわち，f がモニックでないならば，f は単射ではないことを示す．$f \cdot g = f \cdot h$ かつ $g \neq h$ である $g, h : A \to B$ を考える．すると，$g(a) \neq h(a)$ となる $a \in A$ が存在する．一方，$f \cdot g = f \cdot h$ より，この a について $f(g(a)) = f(h(a))$ である．したがって，f は単射ではない．

($\Rightarrow$): 対偶を示す．すなわち，f が単射でないならば，f がモニックでないことを示す．f が単射でないことから，$b \neq b'$ となる b, b' が存在して，$f(b) = f(b')$ である．$g(a) = b, h(a) = b'$ となる $g : a \to B, h : a \to B$ を考える．すると，$f(g(a)) = f(h(a))$ である．したがって，f はモニックではない． □

命題 97 ([6, p.13])**.** **Set** のエピモルフィズムは全射関数である．

証明. **Set** の射 $f : B \to C$ を考える．証明したいのは「f がエピック $(g \cdot f = h \cdot f \Rightarrow g = h) \Leftrightarrow f$ は全射 $(\forall b \exists a.\ f(a) = b)$」である．

($\Leftarrow$): 仮定より，$\forall b \exists a.\ f(a) = b$ である．これから $g \neq h \Rightarrow \exists a.\ g(f(a)) \neq h(f(a))$ を示す．この前提より $g(b') \neq h(b')$ となるような b' が存在する．f が全射であることから $f(a') = b'$ となるような a' が存在する．よって，$g(f(a')) \neq h(f(a'))$ である．

($\Rightarrow$): 対偶を示す．f は全射ではないと仮定する．すなわち，$\forall a.\ f(a) \neq b'$ となる b' が存在する．定数関数 $h(x) = 1$ と次の定義の $g : C \to \{0, 1\}$ を考える．

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = b' \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，$g \neq h$ だが，$g \cdot f = h \cdot f$ となる．したがって f はエピックではない． □

命題 98 ([6, p.15])**.** 射 f_1 と f_2 がモニックならば合成射 $f_1 \cdot f_2$ もモニックである．

証明.

$$\begin{array}{ll} & (f_1 \cdot f_2) \cdot h = (f_1 \cdot f_2) \cdot h' \\ \Leftrightarrow & \{\text{ associativity }\} \\ & f_1 \cdot (f_2 \cdot h) = f_1 \cdot (f_2 \cdot h') \\ \Rightarrow & \{\ f_1 \text{ is monic }\} \\ & f_2 \cdot h = f_2 \cdot h' \\ \Rightarrow & \{\ f_2 \text{ is monic }\} \\ & h = h' \end{array}$$

□

命題 99 ([6, p.15])**.** 射 $f_1 \cdot f_2$ がモニックならば f_2 もモニックである．

証明.

$$\begin{array}{ll} & f_2 \cdot h = f_2 \cdot h' \\ \Leftrightarrow & \{\text{ applying } f_1 \} \\ & f_1 \cdot (f_2 \cdot h) = f_1 \cdot (f_2 \cdot h') \\ \Leftrightarrow & \{\text{ associativity }\} \\ & (f_1 \cdot f_2) \cdot h = (f_1 \cdot f_2) \cdot h' \\ \Rightarrow & \{\ f_1 \cdot f_2 \text{ is monic }\} \\ & h = h' \end{array}$$

□

命題 100 ([6, p.16])**.** 射 f_1 と f_2 がエピックならば合成射 $f_1 \cdot f_2$ もエピックである．

証明.

$$\begin{array}{ll} & h \cdot (f_1 \cdot f_2) = h' \cdot (f_1 \cdot f_2) \\ \Leftrightarrow & \{\text{ associativity }\} \\ & (h \cdot f_1) \cdot f_2 = (h' \cdot f_1) \cdot f_2 \\ \Rightarrow & \{\ f_2 \text{ is epic }\} \\ & h \cdot f_1 = h' \cdot f_1 \\ \Rightarrow & \{\ f_1 \text{ is epic }\} \\ & h = h' \end{array}$$

□

命題 101 ([6, p.16])**.** 射 $f_1 \cdot f_2$ がエピックならば f_1 もエピックである．

証明.

$$\begin{array}{ll} & h \cdot f_1 = h' \cdot f_1 \\ \Leftrightarrow & \{\text{ applying } f_2 \} \\ & (h \cdot f_1) \cdot f_2 = (h' \cdot f_1) \cdot f_2 \\ \Leftrightarrow & \{\text{ associativity }\} \\ & h \cdot (f_1 \cdot f_2) = h' \cdot (f_1 \cdot f_2) \\ \Rightarrow & \{\ f_1 \cdot f_2 \text{ is epic }\} \\ & h = h' \end{array}$$

□

定義 102 (図式 (diagram) [5, p.145][6, p.11])**.** 圏 C と有向グラフ $\mathcal{D}$ が与えられていて，$\mathcal{D}$ の各頂点 e には C の D_i から D_j への射 D_e が割り当てられているとき，$\mathcal{D}$ を C における図式と呼ぶ．

定義 103 (直積 (product)[5, p.150][6, p.18])**.** 2 つの対象 A と B の直積とは，射影射 (projection arrow)$\pi_1^{A,B} : A \times B \to A$ と $\pi_2^{A,B} : A \times B \to B$ を伴った対象 $A \times B$ で，次の性質を満たすものをいう．すなわち，任意の射 $f_1 : C \to A$ と $f_2 : C \to B$ について，

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1^{A,B}"'] \arrow[r, "\pi_2^{A,B}"] & B \\ & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dotted, "g"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

の図式を可換にする射 $g : C \to A \times B$ が，正確に 1 つ存在する．ただ 1 つ存在する射 (mediating arrow)g を

$$f_1 \vartriangle f_2 : C \to A \times B$$

と表す．すなわち，

$$f_1 = \pi_1^{A,B} \cdot g \ \wedge\ f_2 = \pi_2^{A,B} \cdot g \implies f_1 \vartriangle f_2 = g \qquad (8)$$

である．

圏と見なされた半順序集合には直積が存在しない (?)[10].

一般に，直積は，複数存在するが，それらは同型である．例えば，$(A\times B,\pi_1^{A,B},\pi_2^{A,B})$ が直積のとき $(B\times A,\pi_2^{B,A},\pi_1^{B,A})$ も直積である．

例 104. 集合 $\{1,2,3\}$ の巾集合の包含関係は以下のハッセ図であらわされる．

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\{1,2\}$ と $\{1,3\}$ の直積は $\{1\}$ $(=\{1,2\}\cap\{1,3\})$ である．

$$\begin{tikzcd}
\{1,2\} & \{1\} \arrow[l] \arrow[r] & \{1,3\} \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

例 105. 半順序集合 $(\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}})$ を考える．1.3 と 3.7 の直積は $1.3(=\min\{1.3,3.7\})$ である．双対圏 $(\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}})$ では，1.3 と 3.7 の直積は $3.7(=\max\{1.3,3.7\})$ である．

命題 106 ([6, p.18][5, p.151])**.** 直積 $(A\times B,\pi_1,\pi_2)$ と直積 (X,π_A,π_B) は同型である．ただし，$\pi_A : X\to A, \pi_B : X\to B$ である．

証明. 図式

$$\begin{tikzcd}
A & A\times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dotted, shift left, "\pi_1\vartriangle\pi_2"] & B \\
 & X \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[u, dotted, shift left, "\pi_A\vartriangle\pi_B"] &
\end{tikzcd}$$

より $A\times B\cong X$ である． □

定義 107 (product map [6, p.19][5, p.152])**.** 射 $f : A\to A'$ と $g : B\to B'$ について，

$$f\times g = (f\cdot\pi_1^{A,B})\vartriangle(g\cdot\pi_2^{A,B}) : A\times B\to A'\times B' \tag{9}$$

と定義する．すなわち $f\times g$ は，

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A\times B \arrow[l, "\pi_1^{A,B}"'] \arrow[r, "\pi_2^{A,B}"] \arrow[d, dotted, "f\times g"] & B \arrow[d, "g"] \\
A' & A'\times B' \arrow[l, "\pi_1^{A',B'}"] \arrow[r, "\pi_2^{A',B'}"'] & B'
\end{tikzcd}$$

の図式を可換にするただ 1 つの射を表す．

命題 108 ([5, p.152])**.**

1. $(f_1\vartriangle f_2)\cdot h = (f_1\cdot h)\vartriangle(f_2\cdot h)$
2. $\pi_1^{A,B}\vartriangle\pi_2^{A,B} = id_A\times id_B = id_{A\times B}$
3. $(f'\times g')\cdot(f\vartriangle g) = (f'\cdot f)\vartriangle(g'\cdot g)$
4. $(f'\times g')\cdot(f\times g) = (f'\cdot f)\times(g'\cdot g)$

証明. 1. ユニバーサルプロパティより，下図の D から $A\times B$ へのただ 1 つの射 $(f_1\cdot h)\vartriangle(f_2\cdot h)$ が定まる．

$$\begin{tikzcd}
A & A\times B \arrow[l, "\pi_1^{A,B}"'] \arrow[r, "\pi_2^{A,B}"] & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, dotted, "f_1\vartriangle f_2"] & \\
 & D \arrow[uul, "f_1\cdot h"] \arrow[uur, "f_2\cdot h"'] \arrow[u, "h"] &
\end{tikzcd}$$

2. 式 9 より，

$$id_A\times id_B = (id_A\cdot\pi_1^{A,B})\vartriangle(id_B\cdot\pi_2^{A,B}) : A\times B\to A\times B$$

が得られる．この射の型より $id_{A\times B} = id_A\times id_B$ である． □

定義 109 (直和 (direct sum)[11] [5, p.152])**.** 2 つの対象 A と B の直和とは，射 $\iota_1^{A,B} : A\to A+B$ と $\iota_2^{A,B} : B\to A+B$ を伴った対象 $A+B$ で，次の性質を満たすものをいう．すなわち，任意の射 $f : A\to C$ と $g : B\to C$ について，

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1^{A,B}"] \arrow[dr, "f_1"'] & A+B \arrow[d, dotted, "p"] & B \arrow[l, "\iota_2^{A,B}"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

の図式を可換にする射 $p : C\to A\times B$ が，正確に 1 つ存在する．ただ 1 つ存在する射 p を

$$f_1\triangledown f_2 : A+B\to C$$

と表す．

Set では，通常の集合の意味での直積と直和が，圏の意味での直積と直和になる．**CPO** では一般に直和が存在しない．

[10] **Poset** には直積が存在するのと，混同してはいけない．

[11] あるいは双対直積 (coproduct), 余積

定義 110 (関手圏 (functor category)[5, p.180], [11, p. 2116])**.** 対象は関手 $C \to D$, 射は関手 $F, G : C \to D$ に関する自然変換 $F \longrightarrow G$.

命題 111 ([10, p.3])**.**

$$f_1 = \pi_1^{A,B} \cdot (f_1 \vartriangle f_2) \tag{10}$$
$$f_2 = \pi_2^{A,B} \cdot (f_1 \vartriangle f_2) \tag{11}$$
$$\pi_1^{A,B} \vartriangle \pi_2^{A,B} = id_{A\times B} \tag{12}$$

定義 112 (equalizer [5, p.155][6, p.22])**.** 圏 C で，射 $f, g : A \to B$ の equalizer とは，次の性質を満たす射 $i : C \to A$ をいう．

1. $f \circ i = g \circ i$
2. $f \circ h = g \circ h$ を満たす任意の射 $h : C \to A$ について $i \circ p = h$ なる射 p が正確に 1 つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, dotted, "p"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Set では常に equalizer が存在する．$f, g : A \to B$ を **Set** の始域と終域が同じ関数とし，X を f と g の値が等しくなるような A の部分集合とする:

$$X = \{x \mid x \in A \land f(x) = g(x)\}$$

このとき，X の値を同じ A の値に移す $i : X \to A$ は f と g の equalizer になる．

CPO では，必ずしも equalizer が存在するとは限らない．

圏と見なされる半順序集合 (cpo) では，equalizer になるのは恒等射のみである．cpo では $f = g$ である．id は equalizer の条件を満たす．id が equalizer のとき，p は常に h になるが，cpo では h は唯一に決まる．

equalizer i が epic であるとき，任意の射 p, p' について $p \cdot i = p' \cdot i \Rightarrow p = p'$ である．これは $h = id$ のときも成立する．よって $p \cdot i = id$ であり $i = id$ である．すなわち，epic equalizer は同型射である．

定義 113 (巾 (exponential)[5, p.158])**.** 直積を持つ圏 C において，対象 A から B への巾対象とは，射 $\mathrm{App}_{A,B} : B^A \times A \to B$ を伴った対象 B^A で次の性質を満たすものをいう．すなわち，任意の対象 C と射 $f : C \times A \to B$ について，

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{App}_{A,B}"] & B & & B^A \\
C \times A \arrow[u, "p \times id_A"] \arrow[ur, "f"'] & & & C \arrow[u, dotted, "p"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $p : C \to B^A$ が正確に 1 つ存在する．

ただ 1 つ存在する射 p を $\mathrm{Cur}(f)$ と表す．例えば，**Mon** には巾は存在しない [6, p.33].

定義 114 (カルテシアン閉圏 (CCC, cartesian closed category)[6, p.35])**.** CCC とは，終対象，2 項直積，巾のある圏である．

Set や **CPO** は CCC である．

定義 115 (添数づけられた族 (indexed family) [5, p.154])**.** I を集合として，各 $i \in I$ について A_i が決まっているとき，I によって添数づけられた族が与えられているといい，$(A_i)_{i\in I}$ と表す．すなわち，$(A_i)_{i\in I}$ は始域が I の関数である．

定義 116 (cone [5, p.163])**.** 圏 C とその図式 $\mathcal{D}$ が与えられているとする．C の対象 X と，$\mathcal{D}$ の各頂点 i について C の射 $\mu_i : X \to D_i$ (D_i は頂点 i に割り当てられた C の対象) が定められていて，$\mathcal{D}$ 中の任意の射 $f : D_i \to D_j$ について，

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\mu_j"] & \\
D_i \arrow[rr, "f"'] & & D_j
\end{tikzcd}$$

が可換であるとする．このとき，対象 X と $\mathcal{D}$ の頂点の集合 V によって添数づけられた射の族 $\mu = (\mu_i : X \to D_i)_{i\in V}$ の組を $\mathcal{D}$ への cone と呼び，$\mu : X \to \mathcal{D}$ と表す．

定義 117 (limit[12] [5, p.163], [7, p.90])**.** C を圏，$\mathcal{D}$ を C の図式として，$\mu : X \to \mathcal{D}$ を cone とする．任意の cone $\mu : Y \to \mathcal{D}$ について，ある射 $p : Y \to X$ が存在して，$\mathcal{D}$ の各頂点 i について，

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\mu_i"'] & & Y \arrow[ll, dotted, "p"'] \arrow[dl, "\nu_i"] \\
& D_i &
\end{tikzcd}$$

が可換になり，しかもこのような射 p が正確に 1 つ存在するとする．このとき対象 X を $\mathcal{D}$ の limit とよぶ．

一般に，limit の X は 1 通りに決まらないが，すべて同型である．

例 118 (limit の例)**.**

- 図式 $\mathcal{D}$ が空のとき，cone は射を伴わない C の中の 1 個の対象のことである．したがって，$\mathcal{D}$ の limit は C の終対象である．
- 直積 X

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & Y \arrow[l, dotted, "p"'] \arrow[dl] \arrow[d] \\
D_i & D_j
\end{tikzcd}$$

---

[12] 射影的極限 (projective limit), 逆極限 (inverse limit) と呼ばれることもある．

- equalizer

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\text{equalizer } i"'] & Y \arrow[l, dotted, "p"'] \arrow[dl] \\
D_i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D_j
\end{tikzcd}
$$

- f' is a pullback of f along g and g' is a pullback of g along f.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dd, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & X \arrow[l, dotted, "k"'] \arrow[d, "j"] \arrow[ddl, "i"] \\
 & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

例 119 ([6, p.29])**.**

- 終対象のない圏では，図式が空なら limit は存在しない．
- 離散圏では，2 つ以上のノードの図式には limit は存在しない．

定理 120 (Limit Theorem [6, p.29])**.** $\mathcal{D}$ を圏 C の図式 (V, E) とする．すべての V および E に添数づけられた C の対象のすべての族が直積を持ち，C の射のすべての組が equalizer を持つならば，$\mathcal{D}$ は limit を持つ．

定理 121 (Limit Theorem [5, p.172])**.** $\mathcal{D}$ を圏 C の図式として，直積 $\prod_{i\in V} D_i$ と $\prod_{e\in E} D_{\mathrm{cod}(e)}$ が存在したとする．また，

$$
\prod_{i\in V} D_i \; \overset{\Delta_{e\in E}\,\pi_{\mathrm{cod}(e)}}{\underset{\Delta_{e\in E}\,(D_e\cdot\pi_{\mathrm{cod}(e)})}{\rightrightarrows}} \; \prod_{e\in E} D_{\mathrm{cod}(e)}
$$

の equalizer $f : X \to \prod_{i\in V} D_i$ が存在したとする．このとき，

$$
\nu = (\pi_i \cdot f)_{i\in V} : X \to \mathcal{D}
$$

は $\mathcal{D}$ の limit である．

定義 122 (pullback [5, p.175][6, p.23])**.** pullback とは，$f\cdot g' = g\cdot f'$ となるような射の組 $f : A \to C, g : B \to C$ および $g' : P \to A, f' : P \to B$ を伴った対象 P であり，もし $i : X \to A, j : X \to B$ が $f\cdot i = g\cdot j$ を満たすならば，$i = g'\cdot k, j = f'\cdot k$ となるようなただ 1 つ $k : X \to P$ が存在するものである．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "i"'] & & \\
 & P \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\
 & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

例 123 ([6, p.25])**.** もし，

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

となる X が pullback ならば，e は f と g の equalizer である．

定義 124 (完全 (complete))**.** 圏 C の任意の図式 $\mathcal{D}$ が limit を持つとき，C は完全であるという．

Set は完全である．一般に，C の対象の任意の族 $(A_i)_{i\in I}$ が直積を持ち，また任意の射の組 $f, g : A \to B$ が equalizer を持つとき，C は完全である．

定義 125 (連続 [7, p.94])**.** limit を保存する関手を連続という．

定義 126 (cocone [5, p.167])**.** 圏 C とその図式 $\mathcal{D}$ が与えられているとする．C の対象 X と $\mathcal{D}$ の各頂点 i について C の射 $\mu_i : D_i \to X$(D_i は頂点 i に割り当てられた C の対象) が定められていて，$\mathcal{D}$ 中の任意の射 $f : D_i \to D_j$ について，

$$
\begin{tikzcd}
D_i \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mu_i"'] & & D_j \arrow[dl, "\mu_j"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
$$

が可換であるとする．このとき，対象 X と $\mathcal{D}$ の頂点の集合 V によって添数づけられた C の射の族 $\mu = (\mu_i : D_i \to X)_{i\in V}$ の組を $\mathcal{D}$ からの cocone と呼び，$\mu : \mathcal{D} \to X$ と表す．

定義 127 (colimit [5, p.168][13])**.** C を圏，$\mathcal{D}$ を C の図式として，$\mu : \mathcal{D} \to X$ を cocone とする．$\mathcal{D}$ からの任意の cocone $\nu : \mathcal{D} \to Y$ について，ある射 $p : X \to Y$ が存在して，$\mathcal{D}$ の各頂点 i について，

$$
\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\nu_i"] & \\
X \arrow[rr, dotted, "p"] & & Y
\end{tikzcd}
$$

が可換になり，しかもこのような射 p が正確に 1 つ存在するとする．このとき μ を $\mathcal{D}$ の colimit とよぶ．

定義 128 (slice category C/C [7, p.16][14])**.** 対象 $C : C$ 上の圏 C である slice category C/C は以下の通り定義される．

- 対象: $\mathrm{cod}(f) = C$ となるような C の射 f
- 射: $f : X \to C$ から $f' : X' \to C$ への射は，$f'\cdot a = f$ となるような C の射 $a : X \to X'$

[13] colimit は機能的極限 (inductive limit), direct limit と呼ばれることもある．また X を $\lim_{\to} \mathcal{D}$ と表すこともある．

[14] [5, p.143] では，コンマ圏と呼ばれている．一般に slice category はコンマ圏の特殊ケース．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

基底対象 C を忘れる忘却関手 $U : C/C \to C$ が存在する．

5　F 代数

例 129 (Ω-**Alg**[6, p.4])**.** Ω をシグネチャ（signature）[15]の集合，各 $\omega \in \Omega$ に対して，アリティ（arity）$ar(\omega)$ が定義されているものとする．Ω 代数とは，集合 $|A|$（A の台集合，carrier）と各演算 ω に対応する関数 $a_\omega : |A|^{ar(\omega)} \to |A|$ である．Ω 代数 A から Ω 代数 B への Ω 準同型射は，各演算 $\omega \in \Omega$ と $|A|$ の要素からなる組 $x_1, x_2, \ldots, x_{ar(\omega)}$ に対して

$$h(a_\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{ar(\omega)})) = b_\omega(h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_{ar(\omega)}))$$

となる関数 $h : |A| \to |B|$ である．圏 Ω-**Alg** は，Ω 代数を対象に，Ω 準同型射を射にもつ．

別の定義: Ω 代数 A は，台集合 $|A|$ と関数

$$\begin{aligned} &a : (\textstyle\sum_{\omega \in \Omega} |A|^{ar(\omega)}) \to |A| \\ &a(\omega, (x_1, \ldots, x_{ar(\omega)})) = a_\omega(x_1, \ldots, x_{ar(\omega)}) \end{aligned}$$

からなる．ただし，

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\omega \in \Omega} |A|^{ar(\omega)} = \{&(\omega, (x_1, \ldots, x_{ar(\omega)}) \\ &\mid \omega \in \Omega \ \wedge\ x_i \in |A| \text{ for all } 1 \le i \le ar(\omega))\} \end{aligned}$$

である．

例 130 (**Set** 上の F 代数 [6, p.39])**.** 関手 $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は，$g : S \to S'$ を用いて対象の上で

$$F(S) = \sum_{\omega \in \Omega} S^{ar(\omega)}$$

と，射の上で

$$(F(g))(\omega, (x_1, \ldots, x_{ar(\omega)})) = (\omega, (g(x_1), \ldots, g(x_{ar(\omega)})))$$

と定義される．

F 代数は，台集合 $|A|$ と $a : F(|A|) \to |A|$ からなる．

$(|A|, a)$ から $(|B|, b)$ への F 準同型射は下図を可換にする関数 $h : |A| \to |B|$ である．

$$\begin{tikzcd} F(|A|) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "a"'] & F(|B|) \arrow[d, "b"] \\ |A| \arrow[r, "h"'] & |B| \end{tikzcd}$$

定義 131 (始代数 [1, p.39])**.** F 代数 $(\mu F, in)$ は，任意の F 代数 (C, ϕ) に対して下図を可換にする射 $(\!|\phi|\!)$ が唯一に定まるとき，始代数と呼ばれる．

$$\begin{tikzcd} F(\mu F) \arrow[r, "F\,(\!|\phi|\!)"] \arrow[d, "in"'] & F(C) \arrow[d, "\phi"] \\ \mu F \arrow[r, "(\!|\phi|\!)"'] & C \end{tikzcd}$$

$(\!|\phi|\!)$ は catamorphism と呼ばれる．

定理 132 (Lambek の定理 [6, p.41])**.** F 代数 $(\mu F, in)$ が F-**Alg** の始対象ならば in は同型射である．

証明. F 代数 $(F(\mu F), F(in))$ を考える．F 代数 $(\mu F, in)$ が F-**Alg** の始対象であることから以下の図を可換にする F 準同型射 i が定まる．

$$\begin{tikzcd} F(\mu F) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "in"'] & F(F(\mu F)) \arrow[d, "F(in)"] \\ \mu F \arrow[r, "i"'] & F(\mu F) \end{tikzcd}$$

よって，$in \cdot i = id_{\mu F}$ が成り立ち，また $F(i) \cdot F(in) = id_{F(\mu F)}$ より $i \cdot in = id_{\mu F}$ が成り立つ．したがって in は同型射である．　□

定理 133 (Lambek の定理 [1, p.17])**.** 始代数 $in : F\mu F \to \mu F$ は，逆射が

$$in^{-1} = (\!|\, F\ in\,|\!)$$

である同型射である．

F が多項式関手の時，始 F 代数が存在する．

例 134 (空型 [1, p.18])**.** 圏 **Set** において，$(\emptyset, id_\emptyset)$ は，$\emptyset$ からの一意的な準同型射をもつ同型関手の始代数である．

一般に，始対象をもつ任意の圏において，$(0, id_0)$ は始 Id 代数である．

例 135 (自然数 [1, p.18])**.**

$$\begin{aligned} &zero\ () = 0 \\ &succ\ n\ = n + 1 \end{aligned}$$

定義 136 (paramorphism[1, p.36])**.** $(\mu F, in)$ を始 F 代数とする．任意の射 $\phi : F(C \times \mu F) \to C$ に対して，$\langle\!|\phi|\!\rangle : \mu F \to C$ は

$$\langle\!|\phi|\!\rangle = fst \cdot (\!|\langle \phi, in \cdot F\ snd \rangle|\!)$$

と定義される．

定義 137 (apomorphism[1, p.40])**.** $(\nu F, out)$ を終 F 代数とする．任意の射 $\phi : C \to F(C \times \nu F)$ に対して，$[\!(\phi)\!] : C \to \nu F$ は

$$[\!(\phi)\!] = [\!(\,[\phi, F\ inr \cdot out]\,)\!] \cdot inl$$

と定義される．

[15] 演算記号

6　随半

定義 138 (付随 (adjunction)[7, p.179, Chap 9][10, p.60][6, p.47][11, p.2119]). **(ちょっと正しいかあやしい)**　圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を考える．2 つの関手 $L : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ と $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の付随 $L \dashv R$ とは，A と B について自然な全単射の族

$$\lfloor - \rfloor : \mathcal{C}(L\ A, B) \cong \mathcal{D}(A, R\ B) : \lceil - \rceil \tag{13}$$

があったとする．L を R の左随伴 (lad, left adjoint)，R を L の右随伴 (rad, right adjoint) と呼ぶ．同型変換 $\lfloor - \rfloor$ は左付随 (left adjunct), $\lceil - \rceil$ は右付随 (right adjunct) と呼ばれる．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "L"'] \\ \end{tikzcd} \quad \mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

以下の図のように，$L\ A$ から B への $\mathcal{D}$ 射と A から $R(B)$ への $\mathcal{C}$ 射の間の対応が存在したとき，付随 $L \dashv R$ が成立する [6, p.48].

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "L"] \arrow[d, dotted] & L\ A \arrow[d, dotted] \\ R\ B & B \arrow[l, "R"] \end{tikzcd}$$

左随伴は colimit を保つ (始域の圏の colimiting cones を終域の圏の colimiting cone に移す)[6, p.48]．また，双対として，右随伴は limit を保つ．

例 139 (付随に関する自然同型射 [7, p.184]). 式 13 より：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(L\ A, B) \arrow[r, "\lfloor - \rfloor_{A,B}", "\cong"'] \arrow[d, "\mathcal{C}(L\ h, id)"'] & \mathcal{D}(A, R\ B) \arrow[d, "\mathcal{D}(h, id)"] \\ \mathcal{C}(L\ A', B) \arrow[r, "\cong", "\lfloor - \rfloor_{A',B}"'] & \mathcal{D}(A', R\ B) \end{tikzcd}$$

式で表すと：

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}(h, id) \circ \lfloor - \rfloor_{A,B} = \lfloor - \rfloor_{A',B} \circ \mathcal{C}(L\ h, id) \\ \iff & \lfloor f \rfloor_{A,B} \circ h = \lfloor f \circ L\ h \rfloor_{A',B} \end{aligned}$$

例 140. 以下が成り立つ ([10, p.11, Sec. 6]).

$$f = \lceil g \rceil \tag{14}$$
$$\lfloor f \rfloor = g \tag{15}$$

定義 141 (counit, unit, triangle identities [11, p.2121]).

$$\begin{aligned} \epsilon &: L \circ R \xrightarrow{\cdot} Id & \text{counit} \\ \eta &: Id \xrightarrow{\cdot} R \circ L & \text{unit} \end{aligned}$$

は以下の triangle identities を満たさなければならない．

$$\begin{aligned} (\epsilon \circ L) \cdot (L \circ \eta) &= id_L \\ (R \circ \epsilon) \cdot (\eta \circ R) &= id_R \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L \circ \eta"] \arrow[dr, "id_L"'] & L \circ R \circ L \arrow[d, "\epsilon \circ L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta \circ R"] \arrow[dr, "id_R"'] & R \circ L \circ R \arrow[d, "R \circ \epsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

例 142 ([11, p.2121]).

$$\begin{aligned} \epsilon &= \lceil id \rceil \\ \eta &= \lfloor id \rfloor \end{aligned}$$

定義 143 (diagonal functor).

$$\begin{aligned} \Delta &: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ \Delta\ A &= \langle A, A \rangle \\ \Delta\ f &= f \vartriangle f \end{aligned}$$

例 144 (直積の右随伴 [7, p.181, Example 9.2]). 圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ を考える．関手 $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ と $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の付随 $\Delta \dashv R$ より

$$\lfloor - \rfloor : (\mathcal{C} \times \mathcal{C})(\Delta\ A, \langle B_1, B_2 \rangle) \cong \mathcal{C}(A, R\ \langle B_1, B_2 \rangle) : \lceil - \rceil$$

は自然な全単射の族である．よって

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, R\ \langle B_1, B_2 \rangle) &\cong (\mathcal{C} \times \mathcal{C})(\Delta\ A, \langle B_1, B_2 \rangle) \\ &\cong (\mathcal{C} \times \mathcal{C})(\langle A, A \rangle, \langle B_1, B_2 \rangle) \\ &\cong \mathcal{C}(A, B_1) \times \mathcal{C}(A, B_2) \end{aligned}$$

であり，直積の universal property より $R = (\times)$ である．したがって，$\Delta \dashv \times$ が成り立つ．

例 145 ([12, p.90, p.91]).

$$\mathcal{C} \underset{\Delta}{\overset{+}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \underset{\times}{\overset{\Delta}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \qquad (\perp)$$

$$\mathcal{C} \underset{\Delta}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \mathbf{1} \underset{1}{\overset{\Delta}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \qquad (\perp)$$

$$\mathcal{C} \underset{(-)^X}{\overset{- \times X}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \qquad \mathcal{C} \underset{Id}{\overset{Id}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \qquad (\perp)$$

定義 146 (同値 (equivalent)[5, p.179]). 圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が与えられているとする．ある関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$, および $G \circ F \cong I_{\mathcal{C}}$ と $F \circ G \cong I_{\mathcal{D}}$ の自然同型変換が存在するとき，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は同値であるという．

定義 147 (忠実 (faithful), 充満 (full)[5, p.180][12, p.87]). 対象 $A, B : \mathcal{C}$ に対して，関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は，hom 集合

$$F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F\ A, F\ B)$$

を定める．F は，関数 $\lambda f \in \mathcal{C}(A, B).\ F(f)$ が，1 対 1 関数のとき忠実，上への関数のとき充満であるという．

表 2　付随の例 [10, p.14]

付随	始対象	終対象	余積	直積	巾
L	0	Δ	$+$	Δ	$- \times X$
R	Δ	1	Δ	$\times$	$(-)^X$
$\lfloor - \rfloor$			$\triangledown$		$uncurry$
$\lceil - \rceil$				$\vartriangle$	λ
ϵ	¡			$\langle outl, outr \rangle$	$apply$
η		!	$\langle inl, inr \rangle$		

定義 148 (initiality, 始対象 (initial object)[13, p.675][6, p.16]). a is initial if, for all b,

$$\exists(x :: \ x : a \to b \ \wedge \ \forall(y :: \ y : a \to b \Rightarrow y = x))$$

すなわち，すべての対象 A について，ちょうど一つ 0 から A への射が存在するとき，対象 0 を始対象という．

定義 149 (終対象 (final object)[6, p.16]). すべての対象 A について，ちょうど一つ A から 1 への射が存在するとき，対象 1 を終対象という．

例 150 ([6, p.16]). **Set** の始対象は空集合 $\{\}$, 終対象は一点集合 (one-element set)$\{x\}$.

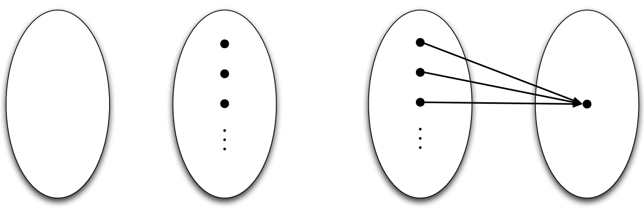


図 1 **Set** の始対象と終対象

命題 151 ([6, p.16]). 終対象は同型を除いて一意的 (unique up to isomorphism) に定まる．

証明. 終対象 $1, 1'$ が存在したとする．終対象の定義からそれぞれ一方から他方への射がちょうど一つ存在する．したがって，1 と $1'$ は同型である． □

始対象も同型を除いて一意的に定まる．

表 3 始対象と終対象

	始対象	終対象
Set	$\{\}$	$\{x\}$
Set × **Set**	$\langle\{\},\{\}\rangle$	$\langle\{x\},\{y\}\rangle$
$\mathbf{Set}^{\to}$	$(\{\} \mapsto x, \{\} \mapsto y)$	$(x' \mapsto \{x\}, x' \mapsto \{y\})$

例 152. 始対象および終対象のない圏の例：

$$* \longrightarrow \star$$

$$\dagger \longrightarrow \bullet$$

定義 153 (global element, constant[6, p.16]). 終対象からオブジェクト S への射は S の定数と呼ばれる．

定義 154 (随伴始不動点方程式?(adjoint initial fixed-point equation)[11, p.2119]). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とし，$L \dashv R$ を関手 $L : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ と $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の随伴の組とし，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ を自己関手とする．未知の $x : \mathcal{C}(L\ (\mu F), A)$ について，随伴始不動点方程式は

$$x \circ L\ in = \Psi\ x \tag{16}$$

である．ただし，基底関手 (base functor)Ψ は型 $\Psi : \forall X : \mathcal{D}.\ \mathcal{C}(L\ X, A) \to \mathcal{C}(L\ (F\ X), A)$ を持つ．唯一存在する随伴始不動点方程式 16 の解は，随伴畳込み (adjoint fold)$(\!|\ \Psi\ |\!)_L$ と呼ばれる．

7 モノイダル構造のある圏

結合性をもつ圏は少ないが，自然同型を除き coherent 規則を条件として結合的である圏は多い．

8 米田の補題

定理 155 (米田の補題 (Yoneda lemma)[8, p.61]). $K : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ を関手，r を（小さな hom 集合ををもつ）圏 $\mathcal{D}$ の対象とするとき，それぞれの自然変換 $\alpha : \mathcal{D}(r, -) \xrightarrow{\cdot} K$ を恒等射 $r \to r$ の像である $\alpha_r\ 1_r$ に移す一対一対応

$$y : \mathrm{Nat}(\mathcal{D}(r, -), K) \cong K\ r$$

が存在する．

9 参考文献

- "The use of equivalences to characterise initiality (and more generally, universality) has been thoroughly advocated by Hoare"[14]

10 予定

具体圏，証明の圏

参考文献

[1] Varmo Vene. *Categorical programming with inductive and coinductive types*. PhD thesis, 2000.

[2] Michael Barr and Charles Wells, editors. *Category Theory for Computing Science, 2Nd Ed.* Prentice Hall International (UK) Ltd., Hertfordshire, UK, UK, 1995.

[3] 青本 和彦, 上野 健爾, 加藤 和也, 神保 道夫, 砂田 利一, 高橋 陽一郎, 深谷 賢治, 俣野 博, and 室田一雄, editors. **岩波 数学入門辞典**. 岩波書店, 2005.

[4] 日本数学会, editor. **岩波 数学辞典**. 岩波書店, 2007.

[5] 横内 寛文. **プログラム意味論 *(*情報数学講座*)***. 共立出版, 1994.

[6] Benjamin C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists*. MIT Press, 1991.

[7] Steve Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, 2010.

[8] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, second edition, 1998.

[9] Maarten M. Fokkinga and Lambert Meertens. Technical report, no. memoranda inf 94-31. Technical report, University of Twente, 1994.

[10] Ralf Hinze. A category theory primer. Technical report, 2010.

[11] Ralf Hinze. Generic programming with adjunctions. In Jeremy Gibbons, editor, *Generic and Indexed Programming*,

volume 7470 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 47–129. Springer-Verlag, 2012.

[12] Ralf Hinze and Daniel W.H. James. Reason isomorphically! In *ACM SIGPLAN Workshop on Generic Programming. Proceedings*, pages 85–96. ACM, 2010.

[13] Maarten M. Fokkinga. Calculate categorically! *Formal Aspects of Computing*, 4(1):673–692, 1992.

[14] C. A. R. Hoare. *Notes on an Approach to Category Theory for Computer Scientists*, volume 55 of *NATO ASI Series*, book section 9, pages 245–305. Springer Berlin Heidelberg, 1989.