

# 可逆小石並べゲーム

横山 哲郎

2016年11月1日

## 1 ルール説明

本稿で述べる小石並べゲームは、図 1a のように  $T$  個の縦に並べられたマスからなる盤と  $S'$  個の石で遊ぶゲームです。マスには下から上へ順に  $1, 2, \dots$  のように番号が振られています。初期状態では、 $S'$  個の石すべてが石置き場に置かれています。

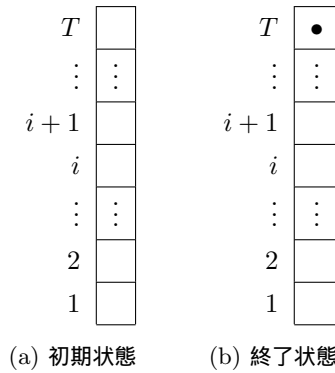


図 1: 盤の初期状態と終了状態 (●は石を表す)

このゲームのクリア条件は、単位時間 (ターン) ごとに以下のどちらかを行って、図 1b のように最終的にマス  $T$  にのみ石を置くことです。

- A. マス  $i$  に石が置かれていたら、石置き場にある石をマス  $i+1$  に置く ( $0 \leq i \leq T-1$ )
- B. マス  $i$  に石が置かれていたら、マス  $i+1$  に置かれた石を石置き場に戻す ( $0 \leq i \leq T-1$ )

ただし、便宜的にマス  $0$  には常に石が置かれているものと見なします。したがって、ルール A によってマス  $1$  には石置き場にある石を常に置くことができ、またルール B によってマス  $1$  に置かれた石を常に石置き場に戻すことができます\*1。

## 2 具体例を考える

上記の問題は、 $T$  個のマス、 $S'$  個の石というように、変数で一般化されています。理解を深めるために  $T$  と  $S'$  に具体的な値を入れて考えてみましょう。

図 2 のような  $T = 8$  個のマスからなる盤 A を考えてみましょう。簡単のために、石はいくつでも使ってよいことにします。

最初のターンでは、石が盤にまったく置かれていないので、ルール B を使うことはできません。したがって最初のターンではルール A を使うしかありません。ルール A を使うと、石置き場の石の数が一つ減って、マス  $1$  に石が置かれて、ターン数が 1 つ増えます。

\*1 マス  $0$  を考える代わりに、ルール A とルール B の前提条件を「マス  $i$  に石が置かれているか  $i = 0$  であるならば」に置き換えて考えても良いでしょう。

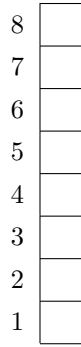


図 2: 盤 A

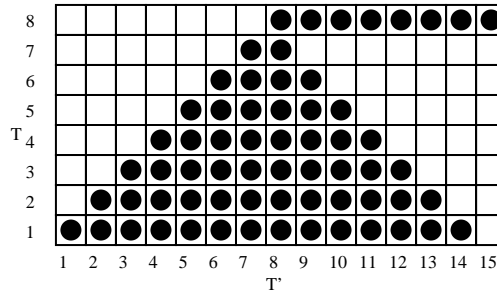


図 3:  $T = 8, S' \geq 8, T' = 15$  の例

解答例. 図 3 のように時刻 1 から時刻 8 までの盤面を並べたような棋譜が解答例のひとつです。この解答例では、時刻 0 から 7 までルール A が、それ以降はルール B が適用されています。この解法では、クリアまでの時間  $T' = 2T - 1$ , 必要な小石の数  $S' = T$  となります。この解法は文献 [1] において発表されました。

問題 1. 上記の問題の条件のうち、石の数を  $S' = 4$  個にした問題をクリアして、その棋譜を示しなさい。すなわち,  $T = 8$  個のマスからなる盤 A を  $S' = 4$  個の石でクリアする棋譜を示しなさい。

解答例. 解答例を図 4 に示します。図 4 において、時刻 2, 5, 7, 8, ... ではルール B が、それ以外の時刻ではルール A が適用されています。図 4 では右上と左下に似たような形が出現しています。また、細かい違いを除けば図全体も同じような形をしています。

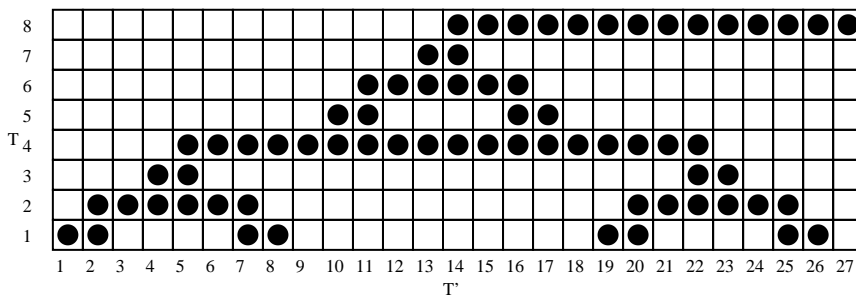


図 4:  $T = 8, S' = 4, T' = 27$  の例

問題 2. 問題 1 の条件のうち石の数を  $S' = 4, 5, 6, 7, 8$  とするとクリアまでの最小の時間はそれぞれいくつになるか。

解答例. クリアまでの最小の時間はそれぞれ  $T' = 27, 23, 21, 17, 15$  である。盤の大きさ  $T = 8$  のときにクリアできる石の数  $S'$  と時間  $T'$  の関係を図 5 に示す。

図 4 では再帰構造が用いられていました。ここで、以下の変数を導入します：

- $T$ : 盤のマス数 (縦軸)

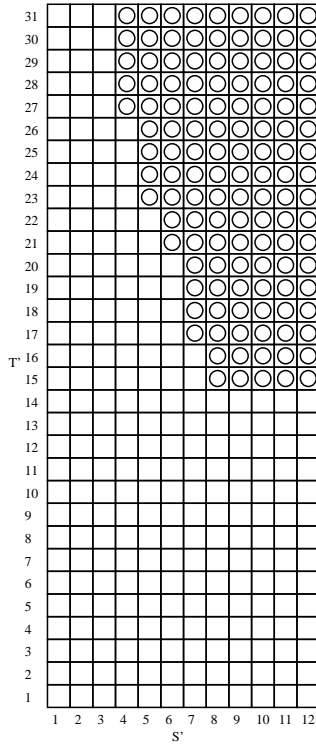


図 5: 盤の大きさ  $T = 8$  のときにクリアできる石の数  $S'$  と時間  $T'$  の関係

- $S'$ : 使える石の数 (各列において小石が出現できる最大の個数)
- $T'$ : クリアまでのターン数 (横軸)
- $k (\geq 2)$ : 各手順における段数
- $n (\geq 0)$ : 手順を再帰的に適用した回数

図 6 では、 $k$  を 2 に固定して、 $n$  を 1 つずつ増やした棋譜を示しています。同様に、図 7 では、 $k$  を 3 に固定して、 $n$  を 1 つずつ増やした棋譜を示しています。

### 3 一般化

図 6 や図 7 で見た棋譜を一般化すると

$$\begin{aligned}
 T(k, 0) &= 1 \\
 T(k, n + 1) &= kT(k, n) \quad (n \geq 0) \\
 T'(k, 0) &= 1 \\
 T'(k, n + 1) &= (2k - 1)T'(k, n) \quad (n \geq 0) \\
 S'(k, 0) &= 1 \\
 S'(k, n + 1) &= S'(k, n) + (k - 1) \quad (n \geq 0)
 \end{aligned}$$

という漸化式が得られます。漸化式をとくと  $T = k^n$ ,  $S' = n(k - 1) + 1$ ,  $T' = (2k - 1)^n$  が得られます。この解法は [2] で発表されました。

### 4 読書案内

詳しい解説は [3, Section 6.8, p.86] を参照。

### 参考文献

[1] Bennett, C. H.: Logical Reversibility of Computation, *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 17, No. 6, pp. 525-532 (1973).

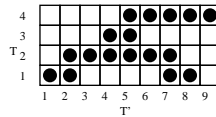
- [2] Bennett, C. H.: Time/space trade-offs for reversible computation, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 18, No. 4, pp. 766–776 (1989).
- [3] Perumalla, K. S.: *Introduction to Reversible Computing*, CRC Press (2013).



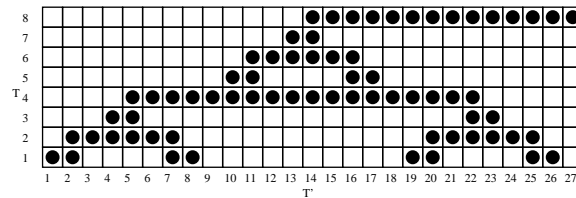
(a)  $T = 1, S = 1, T' = 1, k = 2, n = 0$  の例



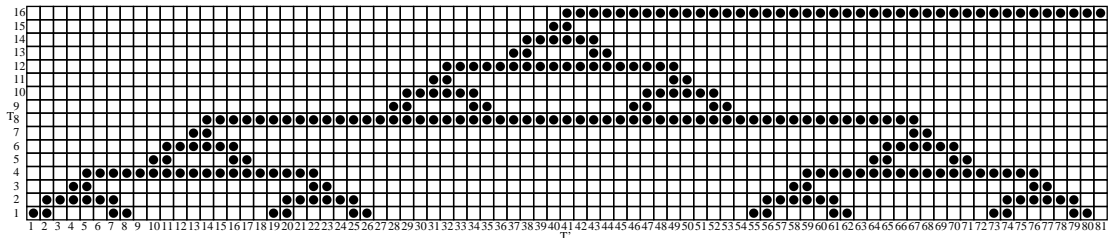
(b)  $T = 2, S = 2, T' = 3, k = 2, n = 1$  の例



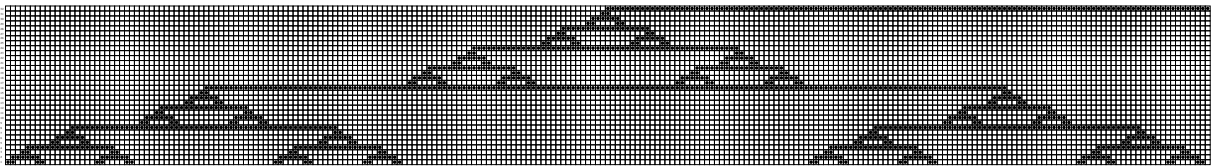
(c)  $T = 4, S = 3, T' = 9, k = 2, n = 2$  の例



(d)  $T = 8, S = 4, T' = 27, k = 2, n = 3$  の例



(e)  $T = 16, S = 5, T' = 81, k = 2, n = 4$  の例

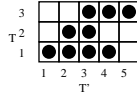


(f)  $T = 32, S = 6, T' = 273, k = 2, n = 5$  の例

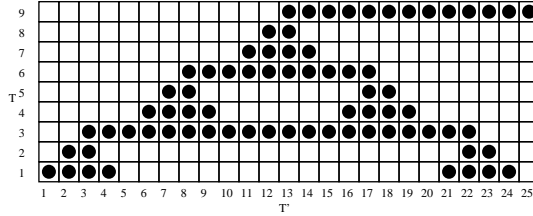
図 6:  $T = 2^n, S = n + 1, T' = 3^n$  ( $k = 2$ ) の例



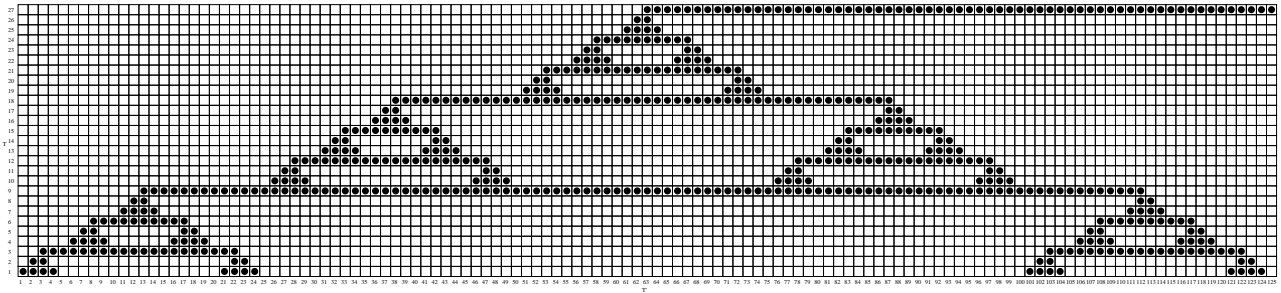
(a)  $T = 1, S = 1, T' = 1, k = 3, n = 0$  の例



(b)  $T = 3, S = 3, T' = 5, k = 3, n = 1$  の例



(c)  $T = 9, S = 5, T' = 25, k = 3, n = 2$  の例



(d)  $T = 27, S = 5, T' = 25, k = 3, n = 3$  の例

図 7:  $k = 3$  のときの解答

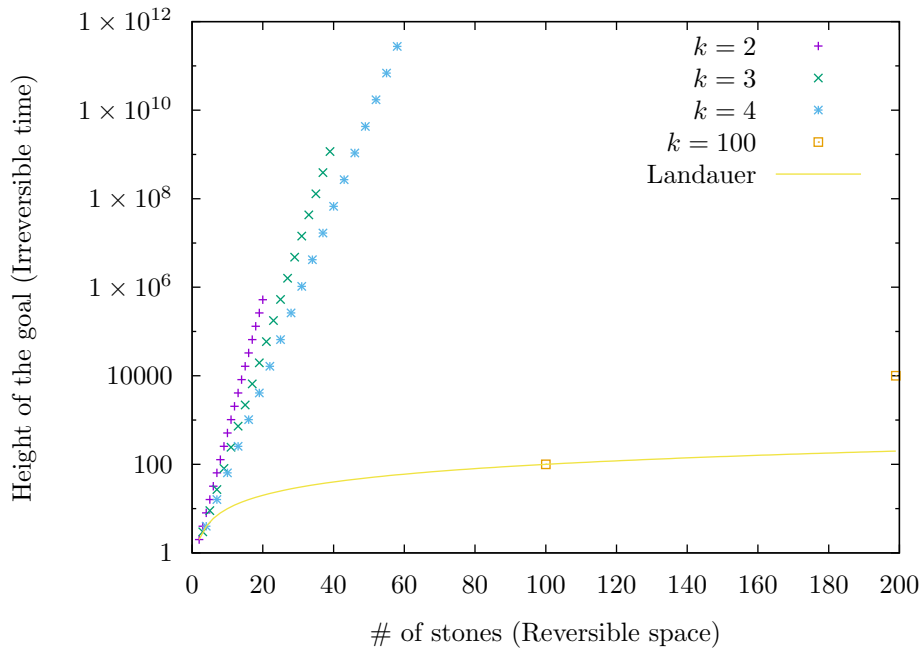


図 8: 石の数 vs 到達できる高さ