

横山研究室夏のレポート課題

2014SE020 廣瀬 隼大

担当 問 4.2

問 4.2

問題文 閉じた論理式の集合は極大無矛盾ならばセオリーであることを示せ

まず初めに、閉じた論理式の集合を P と置く。

言語を P' と置く。すると $P \subseteq P'$ は明らかである。

また、 P' 内の論理式の有限リストを Γ と置く。

$\Gamma = F_1, F_2, \dots, F_n$ (F_n : 任意の論理式) と置く。

次に問題文を分析する。すると以下のようなことが分かる。

コンピュータサイエンス入門(2)の P55 の定義 4.6 より、 P が極大無矛盾だということは次の条件が成り立っている。

(i) P は無矛盾である。

(ii) もしも P' が無矛盾でしかも $P \subseteq P'$ ならば $P = P'$ である。

この問題文に置けるセオリーとは P の極大無矛盾性と定義 4.2 を利用して、以下の通りである。

P' の閉じた論理式の集まり $P(P \subseteq P')$ は以下の条件を満たすとき (P') のセオリーとなる。

$P \vdash F$ ならば $F \in P$ である。 (F : 任意の論理式)

すなわち、この問題においては、問題文とその条件より、言語 P' 内で極大無矛盾が成り立っていて、かつ $P \vdash F$ の状態の時、 $F \in P$ を証明すれば良い。

つまり、言語 P' 内で P は無矛盾であり、もしも P' が無矛盾でしかも $P \subseteq P'$ ならば $P = P'$ の状態で、 $P \vdash F$ の状態の時、 $F \in P$ を証明すれば良いと言うことが出来る。

また、 P が無矛盾であるということはすなわち P46 の定義 3.14 より P 内には以下の条件が成り立っている。

P に含まれる論理式のどの有限リスト Γ についても $\Gamma \vdash \perp$ が証明出来ない。

(あ) P は無矛盾、 P' が無矛盾だと仮定する。

また、 $P \subseteq P'$ が P の定義より、成り立っているため、 $P = P'$ だと仮定する。

さらに $P \vdash F$ だと仮定する。 (F : 任意の論理式)

また、 P' の定義における文より、 P' 内の論理式全体の有限リスト Γ なので、 $\Gamma \in P'$ である。

よって、これらを使って、 $P \vdash F$ と言うことは、 $\Gamma = F_1, F_2, \dots, F_n \in P' = P \vdash F$ となる。

つまり、 $F_1, F_2, \dots, F_n \vdash F$ が成り立つのは明らかである。

(い) (あ) の条件を使って $F \in P$ を証明する。

P' の定義における文より、 P' 内の論理式全体の有限リスト Γ なので、 $\Gamma \in P'$ である。

ゆえに P は極大無矛盾なので(あ)より $P = P'$ なので

$P = P' \ni \Gamma = F_1, F_2, \dots, F_n \vdash F$

つまり $F \in P$ は成り立つ。

ゆえに(あ)(い)よりこの問題において、セオリーが成り立つ。

ゆえに命題は証明された。

問 5.1

まず上限を \sup と置くと、問題文は以下ようになる。

$X \subset D$ を単調増加列とすると、 $\sup X \notin X$ ならば X は無限の要素を持つことを示せ

$X \subset D$ を単調増加列とすると、 $\sup X \in X$ ならば X は有限の要素を持つと言うのを証明する。

X が有限の要素を持つならば、 X に最大値と最小値があると言うことを言えば良い。

(i) $X \subset D$ が単調増加列と言うことは、定義 5.5 より D の要素からなる可算な集合

$X = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ が $X_0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n \leq \dots$ を満たすときである。

また、 $\sup X = t$ と置く。 t の定義を記述する。

定義 5.4 より、 D を半順序集合とし、 D の部分集合 X の上限の事である。また、任意の $x \in X$ に対して、 $x \leq t$ 、任意の $y \in D$ に対して、任意の $x \in X$ が $x \leq y$ を満たせば、 $t \leq y$ が成り立つと言うことが出来る。以上が t の定義である。

これにより、上限 t というのは、 D の部分集合 X の最大値と見ることが出来るのである。

(ii) また、 X は単調増加列であるゆえに、 X の最小値は X_0 なのは明らかである。

(i)(ii)より $X \subset D$ を単調増加列とすると、 $\sup X \in X$ ならば X は有限の要素を持つことが示されたので、対偶法より、問題文は成り立つのである。

問 5.2

X と Y を合わせた情報を $X \cup Y$ と置くと問題文は次のようになる。

$\lambda \langle x, y \rangle. x \cup y: D^*D \rightarrow D$ が連続であることを示せである。

D^*D より二次元座標である。

D を CPO だと仮定すると、 D には上限と最小元が存在するということになる。

連続であるというのは定義 5.11 の条件を満たす事である。

ゆえに定義 5.11 の条件を満たすことを証明する。

(i) 定義 5.9 より任意の $(x, y) = (a, b), (c, d)$ に対して、 $(a, b), (c, d) \in D$ だと仮定する。また、 $(a, b) \leq (c, d)$ であると仮定すると、 D は二次元座標であるから、 x 軸上: $a \leq c$, y 軸上: $b \leq d$ が D 上で成り立つ。

よって $a \cup b \leq c \cup d$ は成り立つ。

また、このことから、定義 5.11 は示されて、 $\lambda \langle x, y \rangle. x \cup y$ は単調増加であることが示されるのである。

(ii) 任意の単調増加列 $X \subset D^*D$ に対して、 $\lambda \langle \sup x, \sup y \rangle. \sup x \cup \sup y = \sup(\lambda \langle x, y \rangle. x \cup y)$ が成り立つことを証明する。

ただし、 $x=\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$ が $x_0\leq x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_n\dots$

$y=\{y_0,y_1,y_2,\dots\}$ が $y_0\leq y_1\leq y_2\leq\dots\leq y_n\dots$ を満たしている。

(あ)まず $\sup(\lambda \langle x,y \rangle, x \cup y) \leq \lambda \langle \sup x, \sup y \rangle, \sup x \cup \sup y$ が成り立つことを証明する。 x,y は単調増加であるので値は増えていき、 X と Y を合わせた情報が $X \cup Y$ である。 $x < y, y < x$ が成り立っている際は $x \cup y \leq (x,y)$ は明らか。

また、値が同じ時は例えば、 $x=\{n,n+1,n+2\}, y=\{n-1,n,n+1\}$ と置く(n は任意の整数)と、 $\sup x=n+2, \sup y=n+1$ である。しかし、 $x \cup y=\{n,n+1\}$ であり、 $\sup(x \cup y)=n+1$ である。このことから、 $\sup(x \cup y) \leq \sup x \cup \sup y$ は明らかである。ゆえに $\sup(\lambda \langle x,y \rangle, x \cup y) \leq \lambda \langle \sup x, \sup y \rangle, \sup x \cup \sup y$ は明らかである。

(い) $\lambda \langle \sup x, \sup y \rangle, \sup x \cup \sup y \leq \sup(\lambda \langle x,y \rangle, x \cup y)$ が成り立つことを証明する。

コンピュータサイエンス入門(2)のP69に書いてある一文を利用すると、 $\sup X \in X$ であれば、 $\lambda \langle \sup x, \sup y \rangle, \sup x \cup \sup y \leq \sup(\lambda \langle x,y \rangle, x \cup y)$ は任意の D^*D について成り立つのである。ゆえに、 $\sup X \in X$ を示せば良い。

X は(ii)より、単調増加列である。ゆえに問5.1の(i)を使って、 $X=\sup X$ となる。

また、問5.1の(i)より、 $\sup X$ は X 内における最大値であるため、 $\sup X > X$ となることはありえない。ゆえに $\sup X \in X$ が成り立つ。

ゆえに $\lambda \langle \sup x, \sup y \rangle, \sup x \cup \sup y \leq \sup(\lambda \langle x,y \rangle, x \cup y)$ である。

よって、(あ)(い)より、定義5.11の条件は満たされたので命題は証明された。