ソフトウェア工学演習 レポート
コンピュータサイエンス入門
「論理とプログラム意味論」より 問5.3

水野 竣太郎
学生番号: 14SE067
email: 14se067@m.nanzan-u.ac.jp

平成28 年8 月19 日

1　問題5.3の回答

1.1　(i) に関する答え

$f: D \to D$ が必ずしも連続ではない単調関数である時,

$$F = \{\perp, f(\perp), f^2(\perp), ..., f^n(\perp), ...\}$$

とおくと,f の単調性より, $\perp \sqsubseteq f(\perp)$. よって,

$$f(\perp) \sqsubseteq (\perp), ..., f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp), ...$$

すなわち,F は単調増加列であり,

$$f(x) \sqsubseteq f(\sqcup_{n=0}^{\infty} f^n(\perp))$$

ここで, $f(x) \sqsubseteq f(\sqcup_{n=0}^{\infty} f^n(\perp)) \sqsubseteq \sqcup\{f(f^n(\perp))|n = 0, 1, ...\}$
この時,F と $\{f(f^n(\perp))|n = 0, 1, ...\}$ との差異は, 前者が $\perp$ を持っており, 後者が $\perp$ を持たないことのみであり, 上限は互いに等しい. したがって,

$$f(x) \sqsubseteq x$$

次に,$y \in D$ について, $f(y) \sqsubseteq y$ が成り立つとする.
f は単調であるため,

$$\begin{gathered}
\perp \sqsubseteq y \text{ から}, \ f(\perp) \sqsubseteq f(y) \sqsubseteq y \\
f(\perp) \sqsubseteq y \text{ から}, \ f^2(\perp) \sqsubseteq f(y) \sqsubseteq y \\
\vdots \\
f^n(\perp) \sqsubseteq y \text{ から}, \ f^{n+1}(\perp) \sqsubseteq f(y) \sqsubseteq y
\end{gathered}$$

すなわち, 任意の n について,$f^n(\perp) \sqsubseteq y$ であるから,$\sqcup F \sqsubseteq y$. したがって, x は最小の不動点である.

1.2　(ii) に関する答え

[1] の p.66 における定義より,(ii) における D は CPO であり,$D \to D$ は連続である. この時, f, g は ともに $D \to D$ に属しているから,f, g はともに連続関数である. [1] の定理 5.12 より,f には $f(x) = x$ なる最小の $x \in D$ が存在し,g には $g(x) = x$ なる最小の $x \in D$ が存在する. また, 定理 5.13 より,$f \circ g$ と $g \circ f$ はともに連続である.
$f \circ g$ に関して定理 5.12 より,

$$f \circ g(x) = x$$

すなわち,

$$f(g(x)) = x$$

なる $x \in D$ で最小のものが存在する.

$g \circ f$ も同様に,

$$g \circ f(x) = x$$

すなわち,

$$g(f(x)) = x$$

なる $x \in D$ で最小のものが存在する. よって,$f \circ g = g \circ f$ である時,

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

が成り立つ. この時,x は

$$x = f(x) \text{ かつ } x = g(x)$$

を満たす.

よって, $f, g \in [D \to D]$ が,$f \circ g = g \circ f$ を満たせば

$$x = f(x) \text{ かつ } x = g(x)$$

を満たすような最小の $x \in D$ が存在する.

また,[2] の p.155 の fix に関する定義より,$fix(f)$,$fix(f \circ g)$ はそれぞれ,

$$f : D \to D$$
$$f \circ g : D \to D$$

の繰り返しである. 定理 5.13 より,$f \circ f$,$(f \circ g) \circ (f \circ g)$ はそれぞれ連続である. これは,$f \circ f$ や $(f \circ g) \circ (f \circ g)$ を繰り返し行っても適用される.

したがって, 定理 5.12 より,$fix(f)$,$fix(f \circ g)$ のいずれも $fix(f)(x) = x$,$fix(f \circ g)(x)$ を満たす最小の $x \in D$ が存在する. このとき,

$$x = f(x) \text{ かつ } x = g(x)$$

を満たす最小の $x \in D$ が存在するため,$f(x) = x$ かつ $g(x) = x$ より,

$$f(x) = f(g(x))$$

が成り立つ. 同様にして,

$$f(f(x)) = x$$

$$g(f(x)) = x$$

も成り立つ. したがって, それの繰り返しである $fix(f)$,$fix(f \circ g)$ について,

$$fix(f)(x) = fix(f \circ g)(x)$$

が成り立つ. ゆえに,

$$fix(f) = fix(f \circ g)$$

は成り立つ.

参考文献

[1] 田辺 誠, 中島 玲二, 長谷川 真人, "コンピュータサイエンス入門 論理とプログラム意味論," 岩波書店, 1999 年 9 月, pp.63–70

[2] 大堀 淳 ジャック・ガリグ 西村 進,"コンピュータサイエンス入門 アルゴリズムとプログラム言語," 岩波書店 1999 年 5 月, pp.154–155