

コンピュータサイエンス入門：論理とプログラム意味論

2017年7月25日

1 2章

1.1 準備

補題 1. 命題論理において，論理式

$$A \supset B \equiv \neg A \vee B \quad (1)$$

はトートロジーである．

補題 2. 任意の集合 A について

$$A \cup \emptyset = A \quad (2)$$

である．

1.1.1 項と論理式

変数 (variable), 項 (term) および論理式 (formula) は以下の通りである：

$$\begin{aligned} \mathbf{Var} &\ni x ::= x_0 \mid x_1 \mid x_2 \mid \cdots \\ \mathbf{Term} &\ni t ::= x \mid f(\overbrace{t, \dots, t}^k) \\ \mathbf{Form} &\ni \phi ::= P(\overbrace{t, \dots, t}^k) \mid \perp \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi) \mid \\ &(\forall x \phi) \mid (\exists x \phi) \mid (t = t) \end{aligned}$$

以下では，括弧を省略しても曖昧でない場合は，括弧は省略することがある．

1.1.2 帰納法

自然数の上の帰納法 高校で学習した自然数の上の (数学的) 帰納法を考える．

自然数 n の上の述語 $Q(n)$ が与えられたとき以下が成り立つとする：

1. $Q(0)$ である．
2. 任意の自然数 k について， $Q(k)$ ならば $Q(k+1)$ である．

このとき，任意の自然数 n について $Q(n)$ が成り立つ．

自然数は以下のようにも定義できる：

$$\mathbf{Nat} \ni n ::= z \mid s(n)$$

この場合、自然数の上の帰納法は以下のように表される。

自然数 n の上の述語 $Q(n)$ が与えられたとき以下が成り立つとする：

1. $Q(z)$ である。
2. 任意の自然数 k について、 $Q(k)$ ならば $Q(s(k))$ である。

このとき、任意の自然数 n について $Q(n)$ が成り立つ。

構造的帰納法 項 t の上の述語 $Q(t)$ が与えられたとき以下が成り立つとする：

1. $Q(x)$ である。
2. 任意の項 t_1, \dots, t_k について、 $Q(t_1), \dots, Q(t_k)$ ならば $Q(P(t_1, \dots, t_k))$ である。

このとき、任意の項 t について、 $Q(t)$ が成り立つ。

論理式 ϕ の上の述語 $Q(\phi)$ が与えられたとき以下が成り立つとする：

1. 任意の項 t_1, \dots, t_k について、 $Q(P(t_1, \dots, t_k))$ である。
2. $Q(\perp)$ である。
3. 任意の論理式 ϕ_1, ϕ_2 について、 $Q(\phi_1)$ かつ $Q(\phi_2)$ ならば、 $Q(\phi_1 \wedge \phi_2)$ である。
4. 任意の論理式 ϕ_1, ϕ_2 について、 $Q(\phi_1)$ かつ $Q(\phi_2)$ ならば、 $Q(\phi_1 \vee \phi_2)$ である。
5. 任意の論理式 ϕ_1, ϕ_2 について、 $Q(\phi_1)$ かつ $Q(\phi_2)$ ならば、 $Q(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ である。
6. 任意の論理式 ϕ について、 $Q(\phi)$ ならば、 $Q(\forall x\phi)$ である。
7. 任意の論理式 ϕ について、 $Q(\phi)$ ならば、 $Q(\exists x\phi)$ である。
8. 任意の項 t_1, t_2 について、 $Q(t_1 = t_2)$ である。

このとき、任意の論理式 ϕ について、 $Q(\phi)$ が成り立つ。

1.1.3 解釈

定義 1. ストラクチャとその領域 U が与えられているものとする。項 t の自由変数がリスト y_1, \dots, y_n に含まれているとき、 t の解釈とは以下のように帰納的に定義される n 変数の関数 $\llbracket t \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} : U^n \rightarrow U$ である。

$$\llbracket y_i \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n) = a_i \quad (\text{T1})$$

$$\llbracket f(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n) = \llbracket f \rrbracket(\llbracket t_1 \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n), \dots, \llbracket t_k \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n)) \quad (\text{T2})$$

また、論理式 ϕ の自由変数がリスト y_1, \dots, y_n に含まれているとき、 ϕ の解釈とは以下のように定義される U^n の部分集合 $\llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \subseteq U^n$ である。

$$\begin{aligned} \llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \\ = \{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid (\llbracket t_1 \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n), \dots, \llbracket t_k \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n)) \in \llbracket P \rrbracket \} \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

$$\llbracket \perp \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \emptyset \quad (\text{P2})$$

$$\llbracket (\phi \wedge \psi) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \cap \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad (\text{P3})$$

$$\llbracket (\phi \vee \psi) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \cup \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad (\text{P4})$$

$$\llbracket (\phi \rightarrow \psi) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid \begin{array}{l} \text{もしも } (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \text{ ならば} \\ (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \end{array} \right\} \quad (\text{P5})$$

$$\llbracket (\forall x \phi) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ (a, a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x, y_1, \dots, y_n} \end{array} \right\} \quad (\text{P6})$$

$$\llbracket (\exists x \phi) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ について} \\ (a, a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x, y_1, \dots, y_n} \end{array} \right\} \quad (\text{P7})$$

$$\llbracket s = t \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid \llbracket s \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n) = \llbracket t \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n) \} \quad (\text{P8})$$

例 1. 例 2.7 のストラクチャを S とする . ストラクチャ S は , 領域を自然数の集合 \mathbb{N} および

- 項数 0 の関数記号 $0, 1, \dots$ について $\mathbb{1}$ から \mathbb{N} への関数 $\llbracket 0 \rrbracket = 0, \llbracket 1 \rrbracket = 1, \dots$
- 項数 2 の関数記号 plus について $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ から \mathbb{N} への関数 $\llbracket \text{plus} \rrbracket(m, n) = m + n$
- 項数 2 の述語記号 less について $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合 $\llbracket \text{less} \rrbracket = \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n \}$

から成り立つ .

1.2 問題

問 2.2 以下の等式変形により示される :

$$\llbracket (\phi \rightarrow \psi) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad (3)$$

$$= \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid \begin{array}{l} \text{もしも } (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \text{ ならば} \\ (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \end{array} \right\} \quad \because (\text{P5}) \text{ 式} \quad (4)$$

$$= \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid \begin{array}{l} (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \text{ ではないか,} \\ \text{または } (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \end{array} \right\} \quad \because (1) \text{ 式} \quad (5)$$

$$= \{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \text{ ではない} \} \cup \{ (a_1, \dots, a_n) \in U^n \mid (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \} \quad (6)$$

$$= (U^n \setminus \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}) \cup \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad \because \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \subseteq U^n \text{ および } \llbracket \psi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \subseteq U^n \quad (7)$$

特に $\psi = \perp$ のとき , 以下が成り立つ :

$$\llbracket (\phi \rightarrow \perp) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = (U^n \setminus \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}) \cup \llbracket \perp \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad \because \text{上記} \quad (8)$$

$$= (U^n \setminus \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}) \cup \emptyset \quad \because \llbracket \perp \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \emptyset \quad (9)$$

$$= (U^n \setminus \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}) \quad \because \text{補題 2} \quad (10)$$

例 2. 例 2.7 のストラクチャ S について以下が成り立つ :

$$\llbracket 5 \rrbracket_{x_1}(a_1) = \llbracket 5 \rrbracket \quad \because \text{式 (T2)(ただし, } k=0, n=1) \quad (11)$$

$$= 5 \quad \because S \text{ の定義} \quad (12)$$

$$\llbracket x_1 \rrbracket_{x_1}(a_1) = a_1 \quad \because (\text{T1}) \text{ 式} \quad (13)$$

$$\llbracket \text{less}(x_1, 5) \rrbracket_{x_1} = \{ a_1 \in U \mid (\llbracket x_1 \rrbracket_{x_1}(a_1), \llbracket 5 \rrbracket_{x_1}(a_1)) \in \llbracket \text{less} \rrbracket \} \quad \because \text{式 (P1)} \quad (14)$$

$$= \{ a_1 \in U \mid (a_1, 5) \in \llbracket \text{less} \rrbracket \} \quad \because \text{上の導出} \quad (15)$$

$$= \{ a_1 \in U \mid (a_1, 5) \in \{ (m, n) \in U \times U \mid m \leq n \} \} \quad \because \llbracket \text{less} \rrbracket \text{ の定義} \quad (16)$$

$$= \{ a_1 \in U \mid a_1 \leq 5 \} \quad (17)$$

$$\llbracket (\exists x_1 \text{less}(x_1, 5)) \rrbracket = \{ () \in U \mid \text{ある } a \in U \text{ について } a \in \llbracket \text{less}(x_1, 5) \rrbracket_{x_1} \} \quad (18)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{ある } a \in U \text{ について } a \in \{ a_1 \in U \mid a_1 \leq 5 \} \} \quad \because \text{上の導出} \quad (19)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{ある } a \in U \text{ について } a \leq 5 \} \quad (20)$$

問 2.3 例えば, $\llbracket \text{less} \rrbracket = \emptyset$ ($\llbracket \text{less} \rrbracket = \{ (m, n) \in U \times U \mid m < m \}$ などでもよい) と定めれば, $\exists x_1 \text{less}(x_1, 5)$ が恒真式ではない.

もう少し, 面白い例を考える. $\llbracket \text{less} \rrbracket = \{ (m, n) \in U \times U \mid m \leq n \}$ と定めたときに, $\exists x_1 \text{less}(x_1, 5)$ が恒真式ではなくなるような領域を探す.

$$\exists x_1 \text{less}(x_1, 5) \text{ が恒真式ではない} \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow \text{「任意のストラクチャ } S \text{ において } S \models \exists x_1 \text{less}(x_1, 5)\text{」 が成り立たない} \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow \text{あるストラクチャ } S \text{ において「} S \models \exists x_1 \text{less}(x_1, 5)\text{」 が成り立たない} \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow \text{あるストラクチャ } S \text{ において } \llbracket (\exists x_1 \text{less}(x_1, 5)) \rrbracket \neq \top \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow \text{あるストラクチャ } S \text{ において } \llbracket (\exists x_1 \text{less}(x_1, 5)) \rrbracket = \perp \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \text{あるストラクチャ } S \text{ において } \llbracket (\exists x_1 \text{less}(x_1, 5)) \rrbracket = \emptyset \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow \text{あるストラクチャ } S \text{ において } \{ () \in U \mid \text{ある } a \in U \text{ について } a \leq 5 \} = \emptyset \quad \because \text{上の導出} \quad (27)$$

これは, U が 5 以下の数を含まないとき成り立つ.

問 2.4 例 2.7 のストラクチャを S とする. 論理式 ϕ を $(\forall x_1((\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rightarrow (x_1 = 0)))$ とする. ストラクチャ S が ϕ のモデルになっていることを示す. ここで示したいことは $S \models \phi$, すなわちストラクチャ

S において $\llbracket \phi \rrbracket = \top$ である . これは以下のような式変形により示される .

$$\llbracket \phi \rrbracket \tag{28}$$

$$= \llbracket (\forall x_1 ((\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rightarrow (x_1 = 0))) \rrbracket \tag{29}$$

$$= \{ () \in \mathbb{N} \mid \text{任意の } a \in \mathbb{N} \text{ について } a \in \llbracket ((\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rightarrow (x_1 = 0)) \rrbracket_{x_1} \} \tag{30}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \llbracket ((\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rightarrow (x_1 = 0)) \rrbracket_{x_1} \\ = (\mathbb{N} \setminus \llbracket (\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rrbracket_{x_1}) \cup \llbracket (x_1 = 0) \rrbracket_{x_1} \quad \because \text{問 2.2} \\ = \left\{ a_1 \in \mathbb{N} \mid \text{任意の } a \text{ について } (a, a_1) \in \llbracket \text{less}(x_1, x_2) \rrbracket_{x_2, x_1} \right\} \\ = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket \text{less}(x_1, x_2) \rrbracket_{x_2, x_1} \\ = \{ (a_1, a_2) \mid (\llbracket x_1 \rrbracket_{x_2, x_1}(a_1, a_2), \llbracket x_2 \rrbracket_{x_2, x_1}(a_1, a_2)) \in \llbracket \text{less} \rrbracket \} \\ = \{ (a_1, a_2) \mid (a_2, a_1) \in \llbracket \text{less} \rrbracket \} \\ = \{ (a_1, a_2) \mid (a_2, a_1) \in \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n \} \} \\ = \{ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n \} \end{array} \right\} \\ = \left\{ a_1 \in \mathbb{N} \mid \text{任意の } a \text{ について } (a, a_1) \in \{ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n \} \right\} \\ = \{ m \in \mathbb{N} \mid \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ について } m \leq n \} \\ = \{ 0 \} \\ (\mathbb{N} \setminus \{ 0 \}) \cup \llbracket (x_1 = 0) \rrbracket_{x_1} \\ = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (x_1 = 0) \rrbracket_{x_1} \\ = \{ a_1 \in \mathbb{N} \mid \llbracket x_1 \rrbracket_{x_1}(a_1) = \llbracket 0 \rrbracket_{x_1}(a_1) \} \\ = \{ a_1 \in \mathbb{N} \mid a_1 = \llbracket 0 \rrbracket \} \\ = \{ a_1 \in \mathbb{N} \mid a_1 = 0 \} \\ = \{ 0 \} \end{array} \right\} \\ (\mathbb{N} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0 \} \\ = \mathbb{N} \end{array} \right\} \tag{31}$$

$$\{ () \in \mathbb{N} \mid \text{任意の } a \in \mathbb{N} \text{ について } a \in \mathbb{N} \} \tag{32}$$

$$= \{ () \} \tag{33}$$

$$= \top \tag{34}$$

ストラクチャ S の領域を U と書くことにして , U は自然数 \mathbb{N} ではなく整数 \mathbb{Z} か有理数 \mathbb{Q} であるとする .

このとき，以下のような導出：

$$\llbracket \phi \rrbracket \quad (35)$$

$$= \llbracket (\forall x_1 ((\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rightarrow (x_1 = 0))) \rrbracket \quad (36)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket ((\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rightarrow (x_1 = 0)) \rrbracket_{x_1} \} \quad (37)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \llbracket ((\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rightarrow (x_1 = 0)) \rrbracket_{x_1} \\ = (U \setminus \llbracket (\forall x_2 \text{less}(x_1, x_2)) \rrbracket_{x_1}) \cup \llbracket (x_1 = 0) \rrbracket_{x_1} \quad \because \text{問 2.2} \\ = \left\{ a_1 \in U \mid \text{任意の } a \text{ について } (a, a_1) \in \llbracket \text{less}(x_1, x_2) \rrbracket_{x_2, x_1} \right\} \\ = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket \text{less}(x_1, x_2) \rrbracket_{x_2, x_1} \\ = \{ (a_1, a_2) \mid (\llbracket x_1 \rrbracket_{x_2, x_1}(a_1, a_2), \llbracket x_2 \rrbracket_{x_2, x_1}(a_1, a_2)) \in \llbracket \text{less} \rrbracket \} \\ = \{ (a_1, a_2) \mid (a_2, a_1) \in \llbracket \text{less} \rrbracket \} \\ = \{ (a_1, a_2) \mid (a_2, a_1) \in \{ (m, n) \in U \times U \mid m \leq n \} \} \\ = \{ (n, m) \in U \times U \mid m \leq n \} \} \\ \left. \begin{array}{l} \{ a_1 \in U \mid \text{任意の } a \text{ について } (a, a_1) \in \{ (n, m) \in U \times U \mid m \leq n \} \} \\ = \emptyset \end{array} \right\} \\ (U \setminus \emptyset) \cup \llbracket (x_1 = 0) \rrbracket_{x_1} \\ = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (x_1 = 0) \rrbracket_{x_1} \\ = \{ a_1 \in U \mid \llbracket x_1 \rrbracket_{x_1}(a_1) = \llbracket 0 \rrbracket_{x_1}(a_1) \} \\ = \{ a_1 \in U \mid a_1 = \llbracket 0 \rrbracket \} \\ = \{ a_1 \in U \mid a_1 = 0 \} \\ = \{ 0 \} \end{array} \right\} \\ (U \setminus \emptyset) \cup \{ 0 \} \\ = U \end{array} \right\} \quad (38)$$

$$\{ () \in U \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in U \} \quad (39)$$

$$= \{ () \} \quad (40)$$

$$= \top \quad (41)$$

が行えるため，これらの場合も $S \models \phi$ ，すなわちモデルになっているといえる。

問 2.5

補題 3. y が t の中の自由変数ではないとき

$$\llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) = \llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (42)$$

である。

証明. t についての構造的帰納法で示す。

$t = x_i$ のとき，

$$\llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) \quad (43)$$

$$= \llbracket x_i \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) \quad (44)$$

$$= a_i \quad (45)$$

$$= \llbracket x_i \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (46)$$

$$= \llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (47)$$

$$(48)$$

であるので成り立つ。

$t = f(t_1, \dots, t_k)$ のときを考える．帰納法の仮定は

$$\llbracket t_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) = \llbracket t_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (49)$$

$$\llbracket t_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) = \llbracket t_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (50)$$

$$\vdots \quad (51)$$

$$\llbracket t_k \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) = \llbracket t_k \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (52)$$

となる．これを用いると以下の導出が行える．

$$\llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) \quad (53)$$

$$= \llbracket f(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) \quad \because \text{仮定} \quad (54)$$

$$= \llbracket f \rrbracket(\llbracket t_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n), \dots, \llbracket t_k \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n)) \quad (55)$$

$$= \llbracket f \rrbracket(\llbracket t_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a), \dots, \llbracket t_k \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a)) \quad \because \text{帰納法の仮定} \quad (56)$$

$$= \llbracket f(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (57)$$

$$= \llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y}(a_1, \dots, a_n, a) \quad (58)$$

よって題意が成り立つ．

以上より補題は成り立つ． □

系 1. 任意の閉じた項 t と変数のリスト y_1, \dots, y_l について

$$\llbracket t \rrbracket = \llbracket t \rrbracket_{y_1, \dots, y_l} \quad (59)$$

が成り立つ．

証明. $n = 0, 1, \dots$ のときの補題 3 を繰り返し用いて，この等式が得られる． □

以下，簡単のため， $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_n$ を \vec{xy} と表記する．

補題 4. 任意の項 s と閉じた項 t_1, \dots, t_n と変数のリスト \vec{xy} について

$$\llbracket s \rrbracket_{x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_n}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) = \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]s \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l) \quad (60)$$

が成り立つ．

証明. s の上の構造帰納法で示す． $s = x_i (1 \leq i \leq l)$ のとき，

$$\text{左辺} \quad (61)$$

$$= \llbracket x_i \rrbracket_{\vec{xy}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \quad (62)$$

$$= b_i \quad \because \text{式 (T1)} \quad (63)$$

$$= \llbracket x_i \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l) \quad \because \text{式 (T1)} \quad (64)$$

$$= \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]x_i \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l) \quad (65)$$

$$= \text{右辺} \quad (66)$$

である．次に， $s = y_i (1 \leq i \leq n)$ のとき，

$$\text{左辺} \tag{67}$$

$$= \llbracket y_i \rrbracket_{x\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \tag{68}$$

$$= \llbracket t_i \rrbracket \tag{69}$$

$$= \llbracket t_i \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l) \quad \because \text{系 1} \tag{70}$$

$$= \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] y_i \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l) \tag{71}$$

$$= \text{右辺} \tag{72}$$

である．また， $s = f(u_1, \dots, u_m)$ のとき，

$$\text{左辺} \tag{73}$$

$$= \llbracket f(u_1, \dots, u_m) \rrbracket_{x\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \tag{74}$$

$$= \llbracket f \rrbracket(\llbracket u_1 \rrbracket_{x\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket), \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{x\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket)) \tag{75}$$

$$= \llbracket f \rrbracket(\llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] u_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l), \dots, \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] u_m \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l)) \tag{76}$$

\because 帰納法の仮定

$$= \llbracket f([t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] u_1, \dots, [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] u_m) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b_1, \dots, b_l) \tag{77}$$

$$= \text{右辺} \tag{78}$$

である．

以上により題意は示された． \square

定理 1. 論理式 ϕ の自由変数が $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_n$ に含まれているとする．このとき，閉じた項のリスト t_1, \dots, t_n について，

$$(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_n} \quad \text{ならば} \quad (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \tag{79}$$

である．

証明． ϕ の構成に関する帰納法を用いる．

$\phi = P(s_1, \dots, s_k)$ のときは ,

$$(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \quad (80)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket P(s_1, \dots, s_k) \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \quad (81)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in U^{l+n} \left| \begin{array}{l} (\llbracket s_1 \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}}(b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n), \\ \dots, \\ \llbracket s_k \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}}(b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n)) \\ \in \llbracket P \rrbracket \end{array} \right. \right\} \quad \because \text{式 (P1)} \quad (82)$$

$$\Leftrightarrow (\llbracket s_1 \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket), \dots, \llbracket s_k \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket)) \in \llbracket P \rrbracket \quad (83)$$

$$\Leftrightarrow (\llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} (b_1, \dots, b_l), \dots, \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s_k \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} (b_1, \dots, b_l)) \in \llbracket P \rrbracket \quad (84)$$

∴ 補題 4

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (a_1, \dots, a_l) \in U^l \left| \begin{array}{l} (\llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} (a_1, \dots, a_l), \\ \dots, \\ \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s_k \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} (a_1, \dots, a_l)) \\ \in \llbracket P \rrbracket \end{array} \right. \right\} \quad (85)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket P(\llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}, \dots, \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s_k \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (86)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] (P(s_1, \dots, s_k)) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (87)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (88)$$

となる . したがって , (79) は成り立つ .

$\phi = \perp$ のときは , (79) の前提が満たされない . したがって , (79) は成り立つ .

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ のとき

$$(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \quad (89)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \quad (90)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \cap \llbracket \phi_2 \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \quad (91)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_1 \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \quad \text{かつ} \quad (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_2 \rrbracket_{\bar{x}\bar{y}} \quad (92)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad \text{かつ} \quad (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (93)$$

∴ 帰納法の仮定

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \cap \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (94)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket ([t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \wedge [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (95)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] (\phi_1 \wedge \phi_2) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (96)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (97)$$

となり , (79) は成り立つ .

$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ のとき

$$(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (98)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_1 \vee \phi_2 \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (99)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_1 \rrbracket_{x\bar{y}} \cup \llbracket \phi_2 \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (100)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_1 \rrbracket_{x\bar{y}} \text{ または } (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_2 \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (101)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \text{ または } (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \\ \therefore \text{帰納法の仮定} \quad (102)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \cup \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (103)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket ([t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1) \vee ([t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (104)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] (\phi_1 \vee \phi_2) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (105)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (106)$$

となり, (79) は成り立つ.

$\phi = (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ のとき

$$(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (107)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (108)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket)$$

$$\in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in U^{l+n} \mid \begin{array}{l} \text{もしも } (b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi_1 \rrbracket_{x\bar{y}} \text{ ならば} \\ (b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi_2 \rrbracket_{x\bar{y}} \end{array} \right\} \quad (109)$$

$$\Leftrightarrow \text{もしも } (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_1 \rrbracket_{x\bar{y}} \text{ ならば } (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi_2 \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (110)$$

$$\Leftrightarrow \text{もしも } (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \text{ ならば } (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \\ \therefore \text{帰納法の仮定} \quad (111)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l) \in U^l \mid \begin{array}{l} \text{もしも } (b'_1, \dots, b'_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \text{ ならば} \\ \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \end{array} \right\} \quad (112)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l) \in U^l \mid \begin{array}{l} \text{もしも } (b'_1, \dots, b'_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \text{ ならば} \\ (b'_1, \dots, b'_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \end{array} \right\} \quad (113)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket ([t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_1 \rightarrow [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi_2) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (114)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (115)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (116)$$

となり, (79) は成り立つ.

$\phi = (\forall x\phi_1)$ のとき

$$(b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [\phi]_{x\bar{y}} \quad (117)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [(\forall x\phi_1)]_{x\bar{y}} \quad (118)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n])$$

$$\in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in U^{l+n} \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ (a, b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in [\phi_1]_{x, x\bar{y}} \end{array} \right\} \quad (119)$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in U \text{ について } (a, b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [\phi_1]_{x, x\bar{y}} \quad (120)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l) \in U^l \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ (a, b'_1, \dots, b'_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [\phi_1]_{x, x\bar{y}} \end{array} \right\} \quad (121)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l) \in U^l \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ (a, b'_1, \dots, b'_l) \in [[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]\phi_1]_{x, x_1, \dots, x_l} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{帰納法の仮定} \quad (122)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in [\forall x[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]\phi_1]_{x_1, \dots, x_l} \quad (123)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in [[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]\forall x\phi_1]_{x_1, \dots, x_l} \quad (124)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in [[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]\phi]_{x_1, \dots, x_l} \quad (125)$$

となり, (79) は成り立つ.

$\phi = (\exists x\phi_1)$ のとき

$$(b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [\phi]_{x\bar{y}} \quad (126)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [(\exists x\phi_1)]_{x\bar{y}} \quad (127)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n])$$

$$\in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in U^{l+n} \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ について} \\ (a, b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in [\phi_1]_{x, x\bar{y}} \end{array} \right\} \quad (128)$$

$$\Leftrightarrow \text{ある } a \in U \text{ について } (a, b_1, \dots, b_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [\phi_1]_{x, x\bar{y}} \quad (129)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l) \in U^l \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ について} \\ (a, b'_1, \dots, b'_l, [t_1], \dots, [t_n]) \in [\phi_1]_{x, x\bar{y}} \end{array} \right\} \quad (130)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l) \in U^l \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ について} \\ (a, b'_1, \dots, b'_l) \in [[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]\phi_1]_{x, x_1, \dots, x_l} \end{array} \right\} \quad (131)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in [(\exists x[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]\phi_1)]_{x_1, \dots, x_l} \quad (132)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in [[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n](\exists x\phi_1)]_{x_1, \dots, x_l} \quad (133)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in [[t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n]\phi]_{x_1, \dots, x_l} \quad (134)$$

となり, (79) は成り立つ.

$\phi = (s = t)$ のとき

$$(\llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (135)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket s = t \rrbracket_{x\bar{y}} \quad (136)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket)$$

$$\in \{ (b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \in U^{l+n} \mid \llbracket s \rrbracket_{x\bar{y}}(b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) = \llbracket t \rrbracket_{x\bar{y}}(b'_1, \dots, b'_l, a_1, \dots, a_n) \} \quad (137)$$

$$\Leftrightarrow \llbracket s \rrbracket_{x\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) = \llbracket t \rrbracket_{x\bar{y}}(b_1, \dots, b_l, \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \quad (138)$$

$$\Leftrightarrow \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} = \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] t \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (139)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \left\{ (b'_1, \dots, b'_l) \in U^l \mid \begin{array}{l} \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b'_1, \dots, b'_l) = \\ \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] t \rrbracket_{x_1, \dots, x_l}(b'_1, \dots, b'_l) \end{array} \right\} \quad (140)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] s = [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] t \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (141)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] (s = t) \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (142)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_l) \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_l} \quad (143)$$

となり, (79) は成り立つ.

以上により, 題意が成り立つ. \square

系 2. 論理式 ϕ の自由変数が y_1, \dots, y_n に含まれているとする. このとき, 閉じた項のリスト t_1, \dots, t_n について,

$$(\llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad \text{ならば} \quad \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket = \top \quad (144)$$

である.

証明. 定理 1 の $l = 0$ の場合であるため, 題意は成り立つ. \square

注意 1. 問 2.5 の逆は成り立たない.

$U = \{1\}, \llbracket 1 \rrbracket = 1, t = 2, \phi = (1 = 1)$ のときを考える. このとき, $\llbracket [2/y](1 = 1) \rrbracket = \top$ である. しかし, $\llbracket t \rrbracket$ は未定義であるため, $\llbracket t \rrbracket \in \llbracket (1 = 1) \rrbracket_y$ は成り立たない.

なお, 値が未定義である項は, 例えば, $\llbracket \text{minus} \rrbracket(m, n) = m - n$ かつ $U = \mathbb{N}$ である場合の $\llbracket \text{minus}(0, 1) \rrbracket$ が考えられる. 一般に p.29 の定義 2.6(ii) の関数は部分関数である.

問 2.5(別解) 論理式の上の構造帰納法より

$$(\llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad \text{ならば} \quad (\llbracket t_2 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket [t_1/y_1] \phi \rrbracket_{y_2, \dots, y_n}$$

である. よって,

$$(\llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \quad \text{ならば} \quad () \in \llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket$$

である. したがって,

$$\llbracket [t_1/y_1] \cdots [t_n/y_n] \phi \rrbracket = \{()\} = \top$$

である.

問 2.6

補題 5. 任意の $n (\geq 0)$ について, y_1, \dots, y_n, y_{n+1} が ϕ の中の自由変数ではないとき,

$$\llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = U^n \Leftrightarrow \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}} = U^{n+1} \quad (145)$$

である .

証明. ϕ についての構造的帰納法で示す .

$\phi = P(t_1, \dots, t_k)$ のとき ,

$$\llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}} \quad (146)$$

$$= \llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}} \quad (147)$$

$$= \left\{ (a_1, \dots, a_n, a) \in U^{n+1} \mid \begin{array}{l} (\llbracket t_1 \rrbracket_{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}}(a_1, \dots, a_n, a), \\ \dots, \\ \llbracket t_k \rrbracket_{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}}(a_1, \dots, a_n, a)) \\ \in \llbracket P \rrbracket \end{array} \right\} \quad (148)$$

$$= \{ (a_1, \dots, a_n, a) \in U^{n+1} \mid (\llbracket t_1 \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n), \dots, \llbracket t_k \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a_1, \dots, a_n)) \in \llbracket P \rrbracket \} \\ \therefore \text{補題 3} \quad (149)$$

$$= \{ (a_1, \dots, a_n, a) \in U^{n+1} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \{(a'_1, \dots, a'_n) \in U^n \mid \quad (150)$$

$$(\llbracket t_1 \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a'_1, \dots, a'_n), \dots, \llbracket t_k \rrbracket_{y_1, \dots, y_n}(a'_1, \dots, a'_n)) \in \llbracket P \rrbracket\} \quad (151)$$

$$= \{ (a_1, \dots, a_n, a) \in U^{n+1} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} \} \quad (152)$$

$$= \{ (a_1, \dots, a_n, a) \in U^{n+1} \mid (a_1, \dots, a_n) \in U^n \} \quad (153)$$

$$= U^{n+1} \quad (154)$$

であるので成り立つ .

以下, 同様に他の場合でも成り立つ . したがって, 題意は成り立つ . \square

定理 2. S は U を領域にもつストラクチャであるとする . 閉じた論理式 ϕ と変数のリスト y_1, \dots, y_n について

$$S \models \phi \Rightarrow \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = U^n \quad (155)$$

である .

証明. $S \models \phi$ より, 任意のストラクチャ S において $\llbracket \phi \rrbracket = \top$, すなわち $\llbracket \phi \rrbracket = U^0$ である .

自然数 n の上での帰納法により $\llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = U^n$ であることを示す . $n = 0$ のとき, 上記より $\llbracket \phi \rrbracket = U^0$ である . 補題 5 より, $\llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_k} = U^k \Rightarrow \llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}} = U^{k+1}$ である .

以上より題意は示された . \square

問 2.7 ストラクチャの定義で, 領域 U が空集合である場合を考える . このとき, 任意の論理式 ϕ に対して, $\llbracket \phi \rrbracket_{y_1, \dots, y_n} = \emptyset$ となる . すなわち S はどのような論理式のモデルにもならない . この特殊な例を除外するために領域 U が空集合ではないという条件を必要としている .

この特殊な例を除外しなかった場合は, 例えば, 恒真式や充足可能の定義では, 「任意のストラクチャにおいて」という仮定をおいているが, ストラクチャの領域 U に空集合を含むときは, 「空集合を領域とするストラクチャを除いて任意のストラクチャにおいて」などとする必要が出てくる .

(一方, 空集合でない領域 U' をもつストラクチャの中にはモデルとなる論理式が存在する .)

問 2.8 任意のストラクチャ S について以下が成り立つ :

$$(i) (\phi \leftrightarrow \psi) \text{ が恒真式である} \quad (156)$$

$$\Leftrightarrow S \models (\phi \leftrightarrow \psi) \quad (157)$$

$$\Leftrightarrow \text{任意のストラクチャ } S \text{ において } \llbracket (\phi \leftrightarrow \psi) \rrbracket = \top \quad (158)$$

$$\Leftrightarrow \llbracket (\phi \rightarrow \psi) \rrbracket \cap \llbracket (\psi \rightarrow \phi) \rrbracket = \top \quad \because \text{補題 2.14(ii)} \quad (159)$$

$$\Leftrightarrow \llbracket (\phi \rightarrow \psi) \rrbracket = \top \text{ かつ } \llbracket (\psi \rightarrow \phi) \rrbracket = \top \quad (160)$$

$$\Leftrightarrow \{ () \in U \mid \text{もしも } () \in \llbracket \phi \rrbracket \text{ ならば } () \in \llbracket \psi \rrbracket \} = \top \text{ かつ} \\ \{ () \in U \mid \text{もしも } () \in \llbracket \psi \rrbracket \text{ ならば } () \in \llbracket \phi \rrbracket \} = \top \quad (161)$$

$$\Leftrightarrow (\text{もしも } () \in \llbracket \phi \rrbracket \text{ ならば } () \in \llbracket \psi \rrbracket) \text{ かつ } (\text{もしも } () \in \llbracket \psi \rrbracket \text{ ならば } () \in \llbracket \phi \rrbracket) \quad (162)$$

$$\Leftrightarrow (\text{もしも } \llbracket \phi \rrbracket = \top \text{ ならば } \llbracket \psi \rrbracket = \top) \text{ かつ } (\text{もしも } \llbracket \psi \rrbracket = \top \text{ ならば } \llbracket \phi \rrbracket = \top) \quad (163)$$

$$\Leftrightarrow (S \models \llbracket \phi \rrbracket \text{ ならば } S \models \llbracket \psi \rrbracket) \text{ かつ } (S \models \llbracket \psi \rrbracket \text{ ならば } S \models \llbracket \phi \rrbracket) \quad (164)$$

$$\Leftrightarrow (iii) \phi \text{ が恒真式ならば } \psi \text{ も恒真式であり, また } \psi \text{ が恒真式ならば } \phi \text{ も恒真式である.} \quad (165)$$

式 (163)

$$\Leftrightarrow (\text{もしも } \llbracket \phi \rrbracket = \top \text{ ならば } \llbracket \psi \rrbracket = \top) \text{ かつ } (\text{もしも } \llbracket \psi \rrbracket = \top \text{ ならば } \llbracket \phi \rrbracket = \top) \quad (166)$$

$$\Leftrightarrow (\llbracket \phi \rrbracket = \llbracket \psi \rrbracket = \top) \text{ または } (\llbracket \psi \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket = \perp) \quad (167)$$

$$\Leftrightarrow (ii) \llbracket \phi \rrbracket = \llbracket \psi \rrbracket \quad (168)$$

問 2.9

$$((\neg(\neg\phi)) \leftrightarrow \phi) \text{ は恒真式である} \quad (169)$$

$$\Leftrightarrow \llbracket (\neg(\neg\phi)) \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket \quad \because \text{系 2.15(ii)} \quad (170)$$

$$\Leftrightarrow U^n \setminus \llbracket (\neg\phi) \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket \quad \because \text{補題 2.14(i)} \quad (171)$$

$$\Leftrightarrow U^n \setminus (U^n \setminus \llbracket \phi \rrbracket) = \llbracket \phi \rrbracket \quad \because \text{補題 2.14(i)} \quad (172)$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \phi \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket \quad (173)$$

$$\Leftrightarrow \text{常に真} \quad \because (=) \text{ は反射的} \quad (174)$$

問 2.10

$$(i) \llbracket (\neg(\forall x\phi)) \rrbracket = U^0 \setminus \llbracket (\forall x\phi) \rrbracket \quad (175)$$

$$= U^0 \setminus \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (176)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid (\text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x) \text{ が成り立たない} \} \quad (177)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \notin \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (178)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in U \setminus \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (179)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x \} \quad (180)$$

$$= \llbracket (\exists x(\neg\phi)) \rrbracket \quad (181)$$

$$(ii) \llbracket (\neg(\exists x\phi)) \rrbracket = U^0 \setminus \llbracket (\exists x\phi) \rrbracket \quad \because \text{補題 2.14(i)} \quad (182)$$

$$= U^0 \setminus \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (183)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid (\text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x) \text{ が成り立たない} \} \quad (184)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \notin \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (185)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in U \setminus \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (186)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x \} \quad (187)$$

$$= \llbracket (\forall x(\neg\phi)) \rrbracket \quad (188)$$

$$(iii) \llbracket (\forall x\phi) \rrbracket = \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (189)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket (\neg(\neg\phi)) \rrbracket_x \} \quad \because \text{問 2.9} \quad (190)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \notin \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x \} \quad \because \text{補題 2.14(i)} \quad (191)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid (\text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x) \text{ が成り立たない} \} \quad (192)$$

$$= U^0 \setminus \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x \} \quad (193)$$

$$= U^0 \setminus \llbracket (\exists x(\neg\phi)) \rrbracket \quad (194)$$

$$= \llbracket (\neg(\exists x(\neg\phi))) \rrbracket \quad \because \text{補題 2.14(i)} \quad (195)$$

$$(iv) \llbracket (\exists x\phi) \rrbracket = \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \} \quad (196)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \in \llbracket (\neg(\neg\phi)) \rrbracket_x \} \quad \because \text{問 2.9} \quad (197)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid \text{ある } a \in U \text{ が存在して } a \notin \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x \} \quad \because \text{補題 2.14(i)} \quad (198)$$

$$= \{ () \in U^0 \mid (\text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x) \text{ が成り立たない} \} \quad (199)$$

$$= U^0 \setminus \{ () \in U^0 \mid \text{任意の } a \in U \text{ について } a \in \llbracket (\neg\phi) \rrbracket_x \} \quad (200)$$

$$= U^0 \setminus \llbracket (\forall x(\neg\phi)) \rrbracket \quad (201)$$

$$= \llbracket (\neg(\forall x(\neg\phi))) \rrbracket \quad \because \text{補題 2.14(i)} \quad (202)$$

問 2.11

補題 6. 任意の項 t について以下が成り立つ :

$$\llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y_1, y_2}(a_1, \dots, a_n, b_1, b_2) = \llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y_2, y_1}(a_1, \dots, a_n, b_2, b_1) \quad (203)$$

証明. t に関する構造的帰納法より示せる . □

補題 7.

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, b_2) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y_1, y_2} \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n, b_2, b_1) \in \llbracket \phi \rrbracket_{x_1, \dots, x_n, y_2, y_1} \quad (204)$$

証明. 補題 6 を用いた , ϕ に関する構造的帰納法より示せる . □

$$\llbracket (\forall x(\forall y\phi)) \rrbracket = \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ a \in \llbracket (\forall y\phi) \rrbracket_x \end{array} \right\} \quad (205)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ a \in \left\{ a_1 \in U \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a' \in U \text{ について} \\ (a', a_1) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y,x} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (206)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ \text{任意の } a' \in U \text{ について} \\ (a', a) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y,x} \end{array} \right\} \quad (207)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a' \in U \text{ について} \\ \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ (a', a) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y,x} \end{array} \right\} \quad (208)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a' \in U \text{ について} \\ \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ (a, a') \in \llbracket \phi \rrbracket_{x,y} \end{array} \right\} \quad \because \text{補題 7} \quad (209)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a' \in U \text{ について} \\ a' \in \left\{ a_1 \in U \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a \in U \text{ について} \\ (a, a_1) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y,x} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (210)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{任意の } a' \in U \text{ について} \\ a' \in \llbracket (\forall x\phi) \rrbracket_y \end{array} \right\} \quad (211)$$

$$= \llbracket (\forall y(\forall x\phi)) \rrbracket \quad (212)$$

よって, 系 2.15 より $(\forall x(\forall y\phi)) \leftrightarrow (\forall y(\forall x\phi))$ は恒真式である.

$$\llbracket (\exists x(\exists y\phi)) \rrbracket = \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ が存在して} \\ a \in \llbracket (\exists y\phi) \rrbracket_x \end{array} \right\} \quad (213)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ が存在して} \\ a \in \left\{ a_1 \in U \mid \begin{array}{l} \text{ある } a' \in U \text{ が存在して} \\ (a', a_1) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y,x} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (214)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ が存在して} \\ \text{ある } a' \in U \text{ が存在して} \\ (a', a) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y,x} \end{array} \right\} \quad (215)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{ある } a' \in U \text{ が存在して} \\ a' \in \left\{ a_1 \in U \mid \begin{array}{l} \text{ある } a \in U \text{ が存在して} \\ (a, a_1) \in \llbracket \phi \rrbracket_{y,x} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \because \text{補題 7} \quad (216)$$

$$= \left\{ () \in U^0 \mid \begin{array}{l} \text{ある } a' \in U \text{ が存在して} \\ a' \in \llbracket (\exists x\phi) \rrbracket_y \end{array} \right\} \quad (217)$$

$$= \llbracket (\exists y(\exists x\phi)) \rrbracket \quad (218)$$

よって, 系 2.15 より $(\exists x(\exists y\phi)) \leftrightarrow (\exists y(\exists x\phi))$ は恒真式である.

2.12

$$\llbracket (\forall x(\phi \wedge \psi)) \rrbracket = \{ () \in U \mid \text{任意の } a \text{ について } a \in \llbracket (\phi \wedge \psi) \rrbracket_x \} \quad (219)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{任意の } a \text{ について } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \cap \llbracket \psi \rrbracket_x \} \quad (220)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{任意の } a \text{ について } (a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \text{ かつ } a \in \llbracket \psi \rrbracket_x) \} \quad (221)$$

$$= \{ () \in U \mid (\text{任意の } a \text{ について } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x) \text{ かつ } (\text{任意の } a \text{ について } a \in \llbracket \psi \rrbracket_x) \} \quad (222)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{任意の } a \text{ について } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \} \cap \{ () \in U \mid \text{任意の } a \text{ について } a \in \llbracket \psi \rrbracket_x \} \quad (223)$$

$$= \llbracket (\forall x\phi) \rrbracket \cap \llbracket (\forall x\psi) \rrbracket \quad (224)$$

$$= \llbracket ((\forall x\phi) \wedge (\forall x\psi)) \rrbracket \quad (225)$$

よって, 系 2.15 より $(\forall x(\phi \wedge \psi)) \leftrightarrow ((\forall x\phi) \wedge (\forall x\psi))$ は恒真式である.

$$\llbracket (\exists x(\phi \vee \psi)) \rrbracket \quad (226)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{ある } a \text{ が存在して } a \in \llbracket (\phi \vee \psi) \rrbracket_x \} \quad \because \text{式 (P7)} \quad (227)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{ある } a \text{ が存在して } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \cup \llbracket \psi \rrbracket_x \} \quad \because \text{式 (P4)} \quad (228)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{ある } a \text{ が存在して } (a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \text{ または } a \in \llbracket \psi \rrbracket_x) \} \quad (229)$$

$$= \{ () \in U \mid (\text{ある } a \text{ が存在して } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x) \text{ または } (\text{ある } a \text{ が存在して } a \in \llbracket \psi \rrbracket_x) \} \quad (230)$$

$$= \{ () \in U \mid \text{ある } a \text{ が存在して } a \in \llbracket \phi \rrbracket_x \} \cup \{ () \in U \mid \text{ある } a \text{ が存在して } a \in \llbracket \psi \rrbracket_x \} \quad (231)$$

$$= \llbracket (\exists x\phi) \rrbracket \cup \llbracket (\exists x\psi) \rrbracket \quad \because \text{式 (P7)} \quad (232)$$

$$= \llbracket ((\exists x\phi) \vee (\exists x\psi)) \rrbracket \quad \because \text{式 (P4)} \quad (233)$$

よって, 系 2.15 より $(\exists x(\phi \vee \psi)) \leftrightarrow ((\exists x\phi) \vee (\exists x\psi))$ は恒真式である.

4 章

問 4.2(p. 55) 極大無矛盾な集合を \mathcal{P} とする. $T \vdash \varphi$ であるような $T \in \mathcal{P}$ を考える. \mathcal{P} が無矛盾であり $T \vdash \varphi$ なので $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{\varphi\}$ も無矛盾である. 極大無矛盾性の定義の (ii) より $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ である. よって, $\varphi \in T$ である. したがって, \mathcal{P} はセオリーである.

5 章

問 5.3(p. 70) (i) 【Tarski の不動点定理を参照】 $Post = \{x \mid f(x) \sqsubseteq x, x \in D\}$ とおく. α を $Post$ の最小元とする*1.

y を $Post$ の任意の D の要素とする. y は下限以上であるので $\alpha \sqsubseteq y$ である. よって, f の単調性より, $f(\alpha) \sqsubseteq f(y)$ である. 一方, y が $Post$ の要素であることから, $Post$ の定義より $f(y) \sqsubseteq y$ である. これらから $f(\alpha) \sqsubseteq y$ である. $f(\alpha)$ が $Post$ の任意の要素 y 以下であることから, $f(\alpha)$ は $Post$ の下界である. α が $Post$ の下限 (最大下界) であることから, $f(\alpha) \sqsubseteq \alpha$ である. 以上より, D 上の任意の (必ずしも連続ではない) 単調な関数 $f: D \rightarrow D$ について, $f(x) \sqsubseteq x$ を満たすような最小の $x = \alpha$ が存在する.

さらに, 定義により, $Post$ は D の要素のうち $f(x) \sqsubseteq x$ という関係を満たすものをすべて要素にもつ. $f(\alpha) \sqsubseteq \alpha$ と f の単調性から $f(f(\alpha)) \sqsubseteq f(\alpha)$ である. $Post$ の定義より, $f(\alpha) \in Post$ である. $f(\alpha) \sqsubseteq \alpha$ で

*1 α は D の要素であるが, $Post$ の要素とは限らない.

あるので、下限の一意性より $\alpha = f(\alpha)$ である。

以上から α は f の最小不動点である。

定理 5.12 では、実際に最小不動点を構成している。しかし、本問では最小不動点の存在を証明しているに過ぎない。

(ii) f, g は D から D への連続関数全体の集合に属している。したがって、メタ定理 5.22 より、 $f \circ g$ と $g \circ f$ は連続関数である。したがって、 $f, g, f \circ g$, および $g \circ f$ は不動点をもつ。

θ_f を f の不動点とする: $f(\theta_f) = \theta_f$. すると、 $f \circ g = g \circ f$ より、

$$(f \circ g)(\theta_f) = (g \circ f)(\theta_f) = g(\theta_f) \quad (234)$$

である。したがって、 $g(\theta_f)$ は f の不動点である。

f の不動点の集合を P とする。半順序構造 P^{*2} は CPO である。したがって、定義域と値域を P に制限した g は最小不動点 θ_g をもつ。すなわち、 $x = f(x)$ かつ $x = g(x)$ を満たすような最小の $x \in D$ は θ_g である。

$fix(f) = fix(f \circ g)$ は必ずしも成り立たない。なぜなら上記の θ_g が g の最小不動点より大きいことがあるからである。たとえば、

$$f(x) = \lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } x(n) \quad (235)$$

$$g(x) = \lambda n. \text{if } n = 1 \text{ then } 1 \text{ else } x(n) \quad (236)$$

の場合を考える。 $f \circ g = g \circ f$ であり、 $f \circ g$ の最小不動点は g の不動点である。しかし、 g の最小不動点は $f \circ g$ の最小不動点ではない。実際、 $fix(f)(0) = 0 \neq \perp = fix(f \circ g)(0)$ である。

*2 厳密には (P, \sqsubseteq) .