数学的帰納法による証明の例

2016 年 9 月 15 日

　等式

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \tag{1}$$

がすべての正の整数 n について成り立つことを帰納法によって証明する．

　(I) $n = 1$ の場合を考える．(左辺) $= 1$, (右辺) $= 2^1 - 1 = 1$ であるので $n = 1$ のとき式 1 は成り立つ．

　(II) $n = k$ の場合に式 1 が成り立つと仮定する．すると，

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1 \tag{2}$$

が成り立つ．$n = k + 1$ の場合を考える．式 2 を用いて変形すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k \\ &= 2^k - 1 + 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1\end{aligned}$$

という導出が行える．ゆえに，$n = k + 1$ の場合も，式 1 が成り立つ．

　(I), (II) より，すべての正の整数 n について式 1 が成り立つ．