チューリング機械

2014se059 増田大輝

平成 29 年 7 月 25 日

1　可逆チューリング機械

1.1　チューリング機械の定義

チューリング機械を　$T = (Q, \Sigma, b, \delta, q_s, q_f)$ として定める．ただし，Q は内部状態の空でない有限集合，Σ はテープ記号の空でない有限集合，$b(\in S)$ は空白記号でテープの有限個のマス目を除く残りすべてのマス目に b が格納されていると仮定する．δ は $((Q\backslash q_f) \times [\Sigma \times \Sigma] \times Q) \cup ((Q\backslash q_f) \times [\leftarrow, \downarrow, \rightarrow] \times Q)$ の部分集合．q_s は初期状態，q_f は最終状態の集合とする．

1.2　概要

可逆チューリング機械とは，チューリング機械 T の内部状態と，ヘッドの下にある記号に対して，直後の動作が唯一である場合，遷移直後の内部状態とヘッド下の記号が決まれば，どのような動作をした直後かが決定できる性質をもつチューリング機械である．そのため，時間軸の逆方向に決定的なチューリング機械であると言える．

1.3　決定性チューリング機械の条件

チューリング機械を　$T = (Q, \Sigma, b, \delta, q_s, q_f)$ とする，T の任意の 2 つの異なる 3 項組 $m_1 = [p, \langle s, t\rangle, q]$，$m_2 = [p', \langle s', t'\rangle, q']$ に対して $p = p'$ ならば,$s \neq s'$ を満たすとき T を決定性チューリング機械と呼ぶ．

1.4　可逆チューリング機械の条件

チューリング機械を　$T = (Q, \Sigma, b, \delta, q_s, q_f)$ とする，T の任意の 2 つの異なる 3 項組 $m_1 = [p, \langle s, t\rangle, q]$，$m_2 = [p', \langle s', t'\rangle, q']$ に対して $q = q'$ ならば,$t \neq t'$ を満たすとき T を可逆チューリング機械と呼ぶ．

1.5　可逆シミュレート

様々な理由により実物による可逆化が困難または不可能な場合に，実物から特徴的な要素を抽出してモデル化し，それとほぼ同じ条件や規則に従った別のシステムで模擬すること．同じ入力から同じ出力が得られるような?

今回の場合，1 テープのチューリング機械の可逆化に 3 テープのチューリング機械を利用している．

1.6　n テープチューリング機械

n テープチューリング機械 T は $T' = (Q, (\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n), b, \delta, q_s, q_f)$ として定める．Q, b, q_s, q_f は 1 テープチューリング機械と同様であり，$\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n$ はそれぞれ n 本目のテープで利用されるテープ記号の空でない有限集合，δ は $((Q\backslash q_f) \times [[\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ... \times \Sigma_n] \times [\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ... \times \Sigma_n]] \times Q) \cup ((Q\backslash q_f) \times [d_1 \times d_2 \times ... \times d_n] \times Q)$ の部分集合である．ただし，d はヘッド移動の動作規則 $[\leftarrow, \downarrow, \rightarrow]$ である．n テープチューリング機械の決定性チューリング機械の条件と可逆チューリング機械の条件も 1 テープの場合と同様である．

1.7 普通のチューリング機械を可逆的な機械に作りかえる

可逆チューリング機械の定義は上で述べたとおりであるが，今回は非可逆なチューリング機械を可逆チューリング機械にする方法を述べる．今回は非可逆なチューリング機械をシミュレートする可逆なチューリング機械を構成するために，3 本のテープを持つチューリング機械を用いる．数学的に 3 テープ可逆チューリング機械　T' は $T' = (Q, (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), b, \delta, q_s, q_f)$ として定める．T' の 1 本目のテープは T のテープをそのまま表現し，ヘッドの位置も同じである．2 本目のテープは各ステップで T のどの 3 項組が実行されたのかという記述を記録する．3 本目のテープは 1 本目のテープの記述をコピーし，可逆化によって初期状態に戻る 1 本目のテープの代わりに，結果を記録する．Q, b, q_s, q_f は 1 テープチューリング機械と同様であり，$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ は 3 本のテープそれぞれで使用される記号の有限集合である．

δ は 3 項組集合であるが，各項は，$[p, \langle s, t\rangle, q]$ または $[p, d, q]$ の形であった 1 テープのチューリング機械の遷移規則である s, t, d がそれぞれ 3 テープ分必要になるため，3 テープチューリング機械では $[p, \langle [s_1, s_2, s_3], [t_1, t_2, t_3]\rangle, q]$ または $[p, [d_1, d_2, d_3], q]$ の形をしている．そのため, 前者の 3 項組は T' が状態 p で，3 つのヘッドの記号 s_1, s_2, s_3 を読んだ場合，記号 t_1, t_2, t_3 に書き換え，状態を q にすることを意味する．後者の 3 項組は T' が状態 q の場合，ヘッドを d_1, d_2, d_3 の方向に動かし，状態 q にすることを意味する．

可逆性の定義も 1 テープの場合と同様である．すなわち任意の異なる 2 つの 3 項組 $n_1 = [p, \langle [s_1, s_2, s_3], [t_1, t_2, t_3]\rangle, q]$,$n_2 = [p', \langle [s'_1, s'_2, s'_3], [t'_1, t'_2, t'_3]\rangle, q']$ に対して $p' = q'$ ならば $[t_1, t_2, t_3] \neq [t'_1, t'_2, t'_3]$ という関係が成り立つことを言う．

1.8 非可逆チューリング機械をシミュレートする 3 テープ可逆チューリング機械の構成法

まず計算における可逆であることの利点を述べる．可逆計算において単純でわかりやすい利点の 1 つは，計算に要するエネルギーを減らすことである．出力結果から入力の値を求めることができる性質を利用し，不必要な情報 (以下ゴミ情報と呼ぶ) を消去することで，計算に必要なエネルギーを最小にすることが出来る．3 テープ可逆チューリング機械の動作の過程は，大きく，以下の 3 つに分割される．

1. 「2 本目のテープに動作履歴を残しながら計算を実行する過程」
2. 「計算結果を 3 本目のテープにコピーする過程」
3. 「動作履歴を可逆的に消去しながら逆の動作を実行する過程」

このようにして動作を実行することで，最終的に 1 本目のテープに入力が残り，3 本目のテープに答えが出力され，ゴミ情報は綺麗に消去された状態で停止することが出来る．

1.9 可逆化の例

上記の記法を用いて,「空白記号 b が読み込まれるまで，0 を 1 に書き換える」1 テープ非可逆チューリング機械を 3 テープ可逆チューリング機械でシミュレートする．計算ステップは,

1. 開始時，ヘッドは列の左隣のます目に置く．
2. 0 を読んだら 1 に書き換える．その後ヘッドを右に移動させる．1 を読んだらそのままヘッドを右に移動する．
3. b を読んだらヘッドを開始時の位置まで移動させ，動作を停止する．

したがって，チューリング機械 T_2 は，

$T_2=\quad(\{q_s,q_1,q_2,q_3,q_4,q_f\},\{b,0,1\},b,\quad\delta_2,q_s,\{q_f\})$.

遷移規則 δ_2 は，

δ_2={

$[q_s,\langle b,b\rangle,q_1]$, (1)

$[q_2,\langle 1,0\rangle,q_1]$, (2)

$[q_2,\langle 0,1\rangle,q_3]$, (3)

$[q_2,\langle b,1\rangle,q_3]$, (4)

$[q_4,\langle 0,0\rangle,q_3]$, (5)

$[q_4,\langle 1,1\rangle,q_3]$, (6)

$[q_4,\langle b,b\rangle,q_f]$, (7)

$[q_1,\rightarrow,q_2]$, (8)

$[q_3,\leftarrow,q_4]$ (9) }

T_2 は, 遷移規則 (3) と (4) の書き換え後の遷移規則が互いに q_3 であるが，出力表示が互いに 1 であるため，可逆の条件をを満たさない．そのため，T_2 は非可逆である．このチューリング機械 T_2 をシミュレートする可逆チューリング機械 T_3 は，

T_3=($\{q_s,q_1,q_2,q_3,q_4,q_f,c_b,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,$

$p_s,p_1,p_2,p_3,p_4,p_f\}$,

$\{b,0,1\},\{0,1,2,3,4,5,6,7\},\{b,0,1\},0,\delta_3,q_s,\{p_s\}$)

遷移規則 δ_3 は，δ_3={

$[q_s,\langle[b,b,b],[b,1,b]\rangle,q_1]$, $[q_1,[\rightarrow,\rightarrow,\downarrow],q_2]$,

$[q_2,\langle[1,b,b],[0,2,b]\rangle,q_1]$, $[q_3,[\leftarrow,\rightarrow,\downarrow],q_4]$,

$[q_2,\langle[0,b,b],[1,3,b]\rangle,q_3]$,

$[q_2,\langle[b,b,b],[1,4,b]\rangle,q_3]$,

$[q_4,\langle[0,b,b],[0,5,b]\rangle,q_3]$,

$[q_4,\langle[1,b,b],[1,6,b]\rangle,q_3]$,

$[q_4,\langle[b,b,b],[b,7,b]\rangle,q_f]$, $[q_f,[\downarrow,\rightarrow,\downarrow],c_0]$,

$[c_0,\langle[b,b,b],[b,b,b]\rangle,c_1]$, $[c_1,[\rightarrow,\downarrow,\rightarrow],c_2]$,

$[c_2,\langle[0,b,b],[0,b,0]\rangle,c_1]$,

$[c_2,\langle[1,b,b],[1,b,1]\rangle,c_1]$,

$[c_2,\langle[b,b,b],[b,b,b]\rangle,c_3]$,$[c_3,[\leftarrow,\downarrow,\leftarrow],c_4]$,

$[c_4,\langle[0,b,0],[0,b,0]\rangle,c_3]$,

$[c_4,\langle[1,b,1],[1,b,1]\rangle,c_3]$,

$[c_4,\langle[b,b,b],[b,b,b]\rangle,c_5]$,$[c_5,[\downarrow,\leftarrow,\downarrow],p_f]$,

$[p_f,\langle[b,7,b],[b,b,b]\rangle,p_4]$,

$[p_3,\langle[1,6,b],[1,b,b]\rangle,p_4]$,

$[p_3,\langle[0,5,b],[0,b,b]\rangle,p_4]$,

$[p_3,\langle[1,4,b],[b,b,b]\rangle,p_2]$,

$[p_3,\langle[1,3,b],[0,b,b]\rangle,p_2]$,

$[p_1,\langle[0,2,b],[1,b,b]\rangle,p_2]$, $[p_4,[\rightarrow,\leftarrow,\downarrow],p_3]$,

$[p_1,\langle[b,1,b],[b,b,b]\rangle,p_s]$, $[p_2,[\leftarrow,\leftarrow,\downarrow],p_1]$ }

以下は上で述べた 3 テープ可逆チューリング機械の動作に従いながら解説する．まず 1 つ目の過程であるが，δ_3 の最初の 9 個の 3 項組は δ_2 の 9 個の 3 項組に対応している．これらは 1 本目のテープ上で T_2 の動作を以前と同様にシミュレートするだけでなく，2 本目のテープに δ_2 の $1-7$ のどの 3 項組が使われたかを示す $1-7$ の数字を書き込むことで，可逆チューリング機械の条件を満たしながら計算を実行することが出来る．

2 つ目の過程では，T_3 は，T_2 の最終状態である q_f に遷移したとき，c_s に移し，その後 $c_i(i=0,1,...,5)$ を使って 1 本目のテープに記された答えを 3 本目のテープにコピーする．コピー後にゴミ情報を消去するため状態を p_f に遷移する．

3 つ目の過程では，δ_3 の最後の 9 個の 3 項組は最初の 9 個の 3 項組の逆から，つまり q_f から q_s までの動作を行う．そのため p と q はそれぞれ対応していて，最終的には状態 p_s で停止する．

この方法を一般化することにより，次のことが言える．

任意の 1 テープチューリング機械 T に対し，それをシミュレートする 3 テープの可逆チューリング機械 T' では，T に記号列 x を与えたとき，記号列 y を書き出して最終状態で停止するならば，T' に x を与えたとき，ゴミ情報である動作履歴を残すことなく x と y だけを書き出し，最終状態で停止することができる．

2 参考文献

[1]:安部崇嗣・森田憲一
万能可逆チューリング機械の一構成法

*http : //www.kurims.kyoto − u.ac.jp/ kyodo/kokyuroku/contents/pdf/*1426−33.*pdf* [2]:森田憲一　著
可逆計算 pp.13-20(2012).