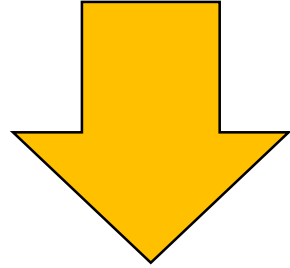


流線トポロジーの間の移り変わり

2015SE056 内藤綾香

1. 導入

■ 構造的に安定した流線模様のカテゴリ



すでに出来ている

■ 独特の一連の単語をこれらのパターンの割り当て

複雑な画像情報を、コンピュータ上で扱いやすい

多方面での応用

物理現象に応用

2次元のハミルトンベクトル場

実験の結果写真
への応用

医学領域での応用

流れと天気の関
連付けへの応用

2. 構造的に安定なハミルトンベクトル場の単語表現

- genus element : トポロジカルに多重接続されたドメインを表す用語
種数[数学] (genus)

- 1-source-sink 点 : 定義2.1

局所的流線構造
(local streamline structures)

1-source-sink 点

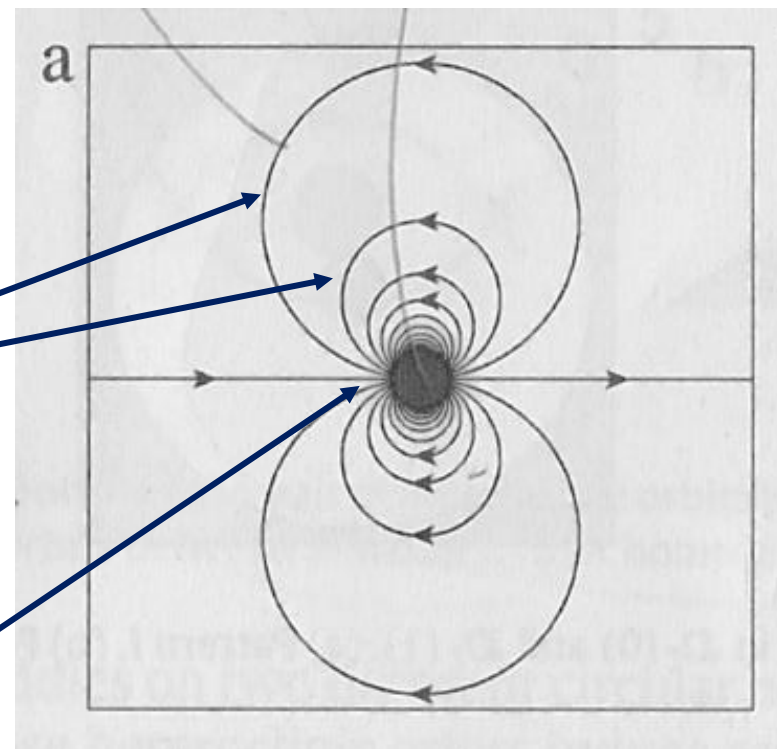
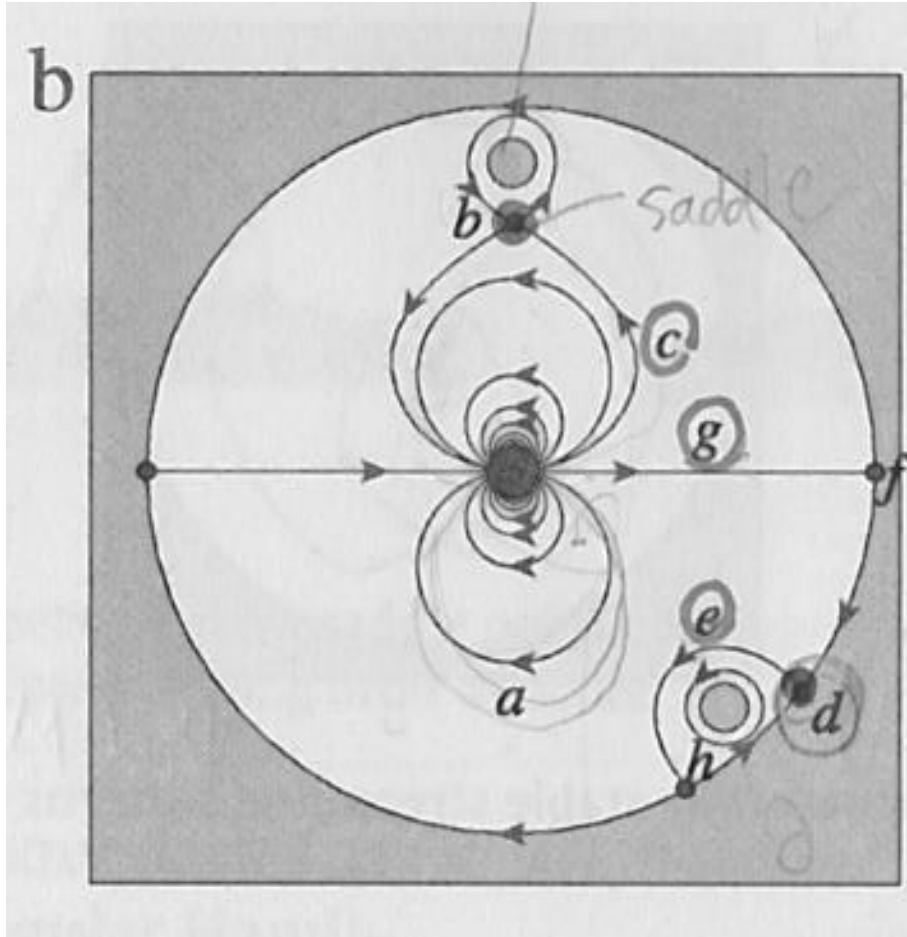


図1

図1(b): H^r と X_1^r での構造的に安定なハミルトンベクトル場の軌道



$H^r \rightarrow$ saddle 接続図
(saddle connection diagram)

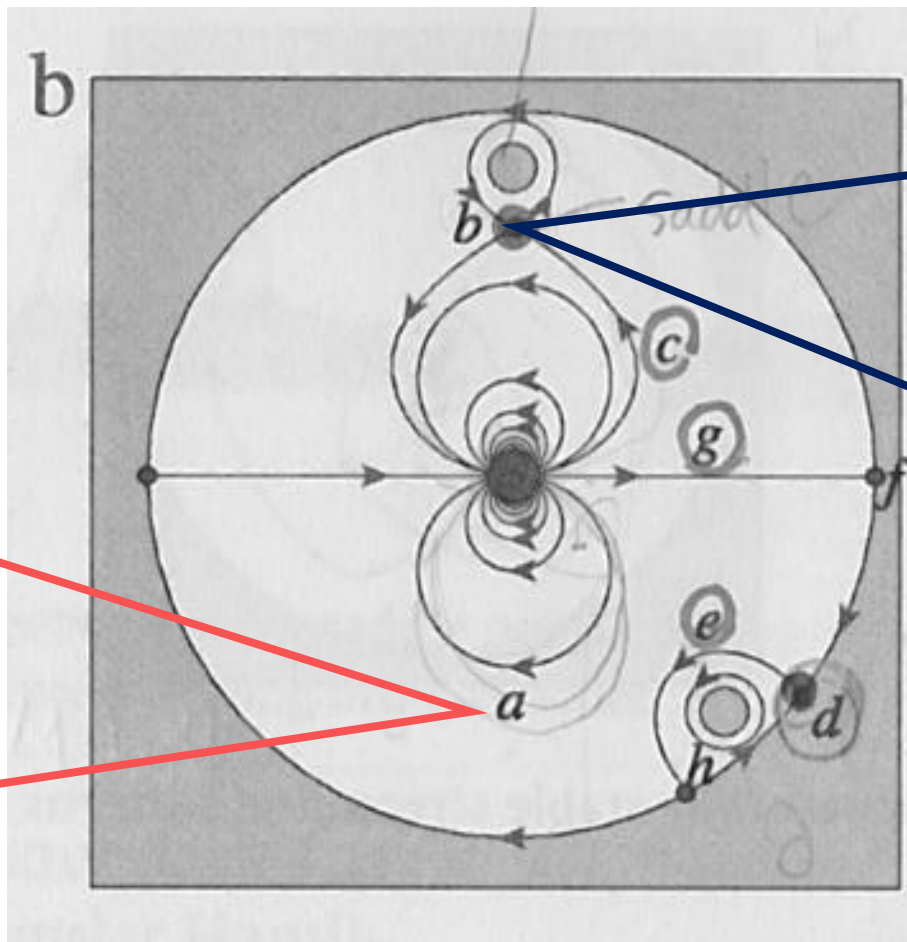
$X_1^r \rightarrow$ ss - saddle 接続図
(ss-saddle connection diagram)

図1

図1(b) ss-orbit と homoclinic saddle point

a: ss軌道
(ss-orbit)

→ \textcircled{S} への自己
接続軌道



b: ホモクリニック鞍点
(homoclinic saddle
point)

→ ホモクリニッ
ク接続を伴った
非変性双曲線よ
どみ点

* \textcircled{S} = 1-source -sink点

図1

参考：ホモクリニック軌道と鞍点

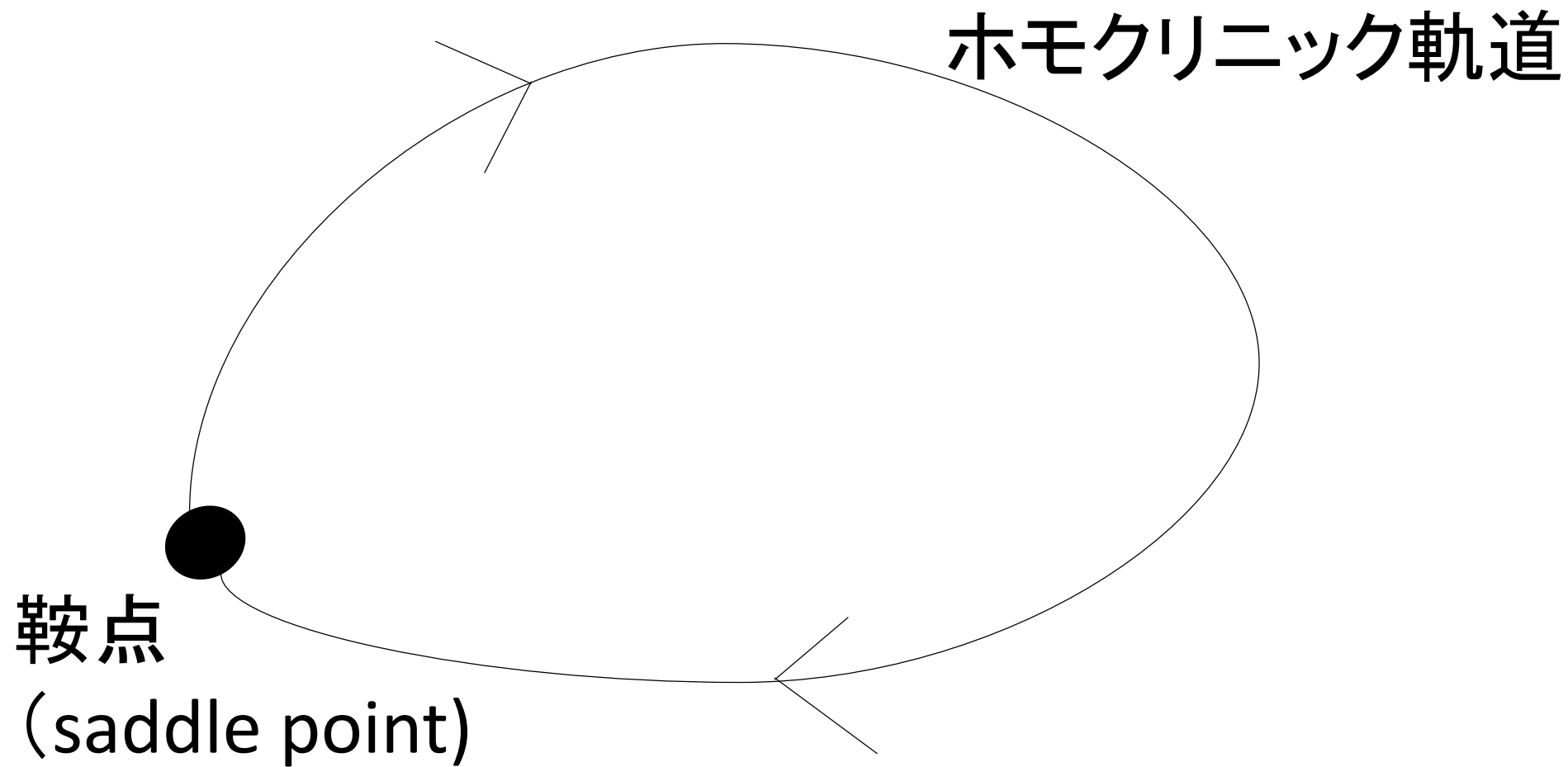


図1(b) 接続(connection)

g: ss- ∂ -saddle 接続
(ss- ∂ -saddle connection)

→ \textcircled{S} につながる ∂ -saddle

C: ss-saddle 接続
(ss - saddle connection)

→ 鞍点と \textcircled{S} の流れ

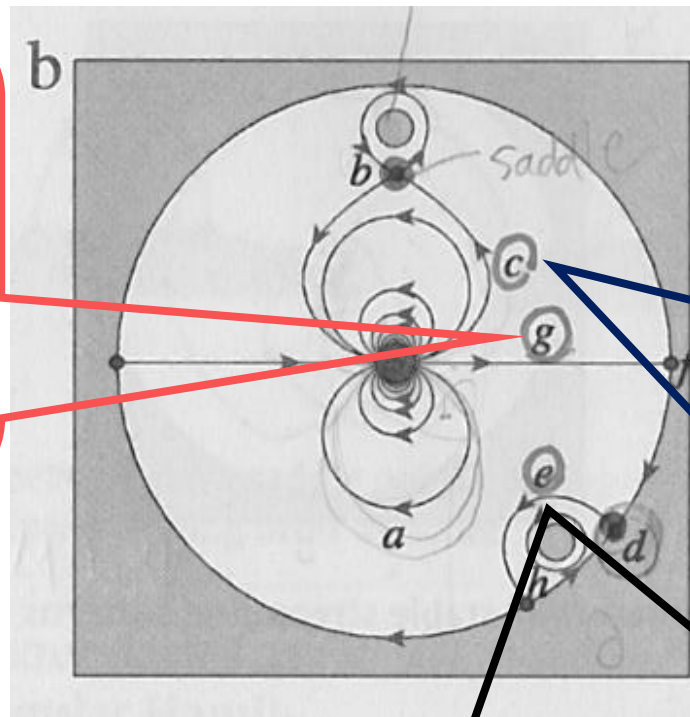
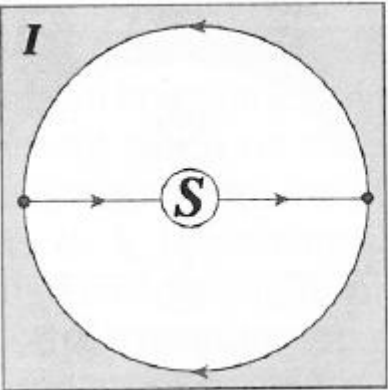
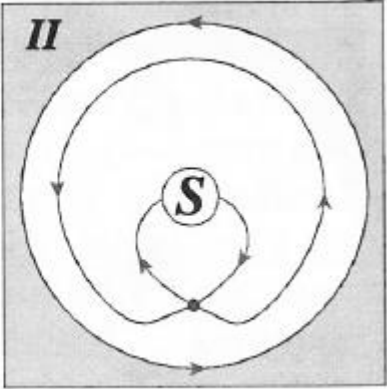
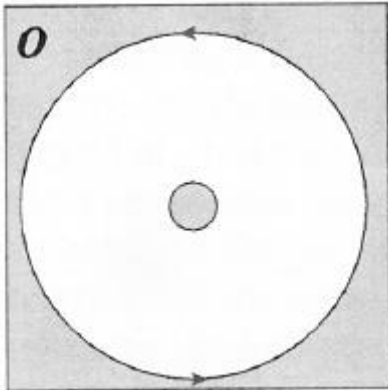


図1

e: ∂ -saddle 接続 (∂ -saddle connection)

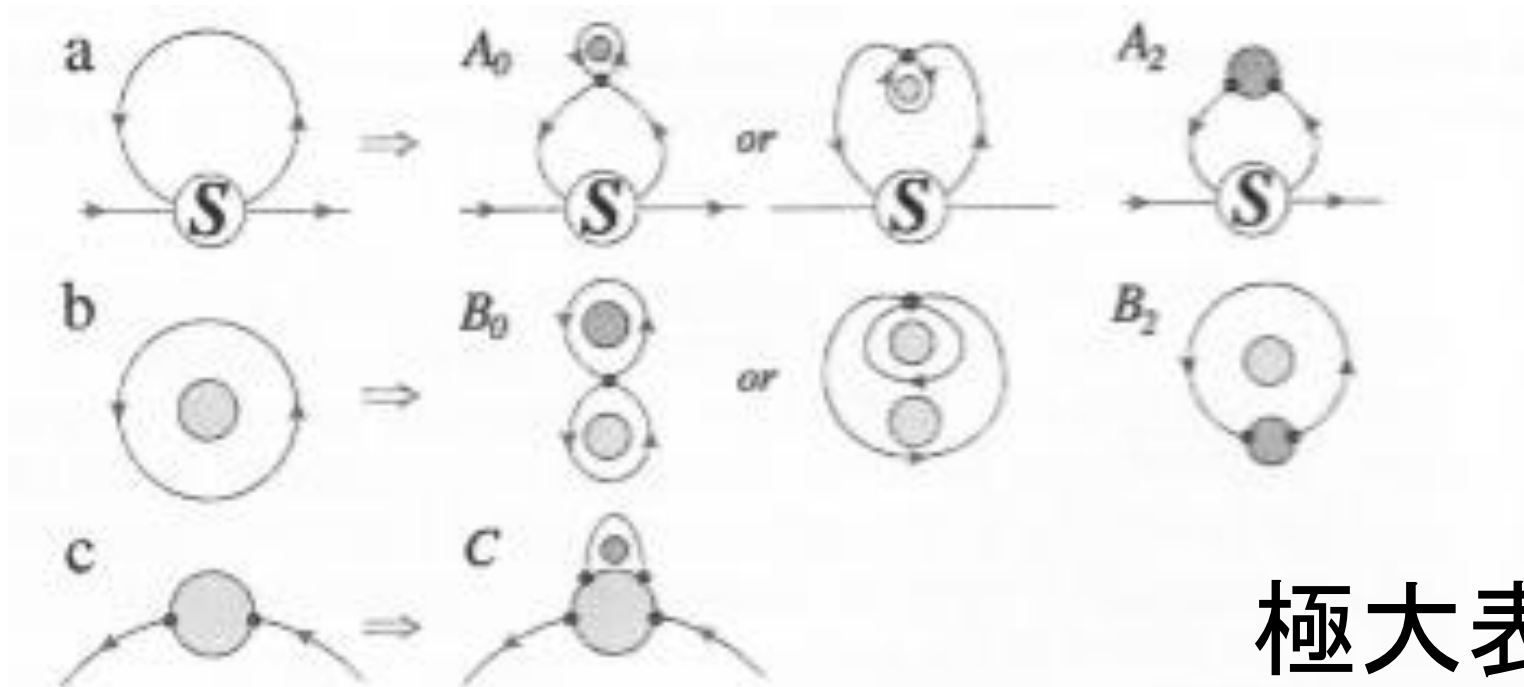
→ 同じ境界で2つの ∂ -saddleにつながる流線

①3つの基本形

$D_z(0)$	$D_z(1)$
<p>a <i>I</i></p>  <p>b <i>II</i></p> 	<p>c <i>O</i></p> 
<p>1-source-sink 点あり</p>	<p>1-source-sink 点なし</p>

② 5の操作 (five operations)

構造的に安定な間で一つずつgenus elementを増やす操作



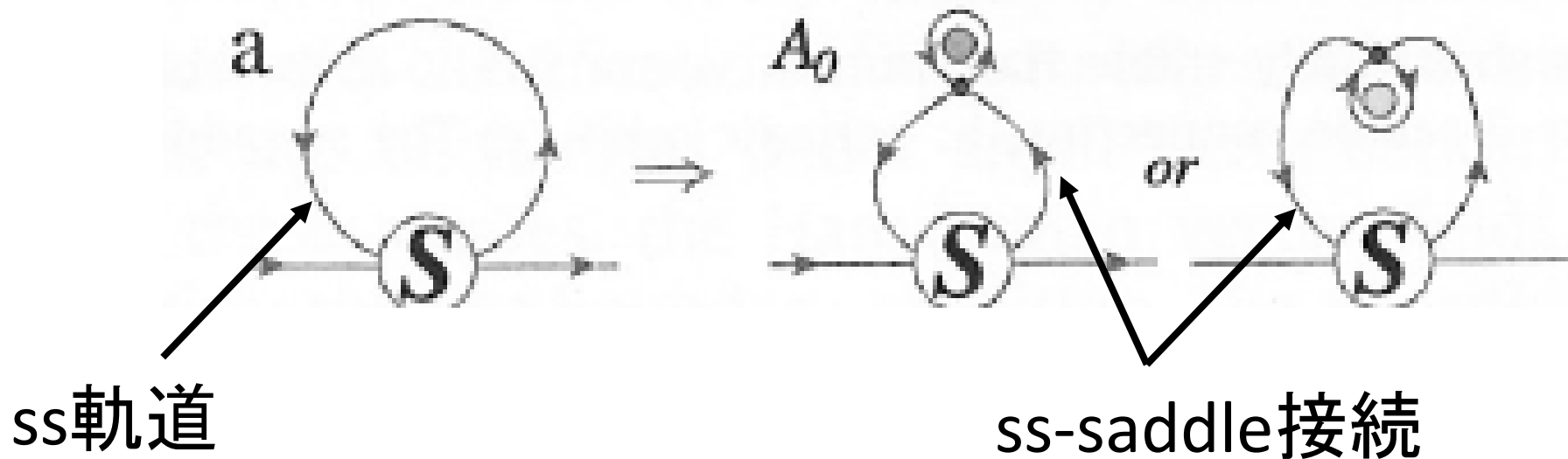
極大表現

Fig. 3. Five operations A_0 , A_2 , B_0 , B_2 and C that increase the genus element by one, illustrated as a dark gray circular boundary, to the flow domain. Applying these operations to the fundamental structurally stable streamline patterns iteratively

② 5つの操作 (five operations)

操作 A_0

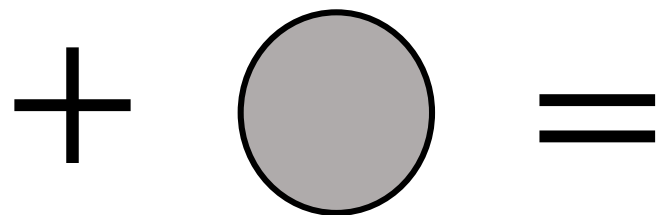
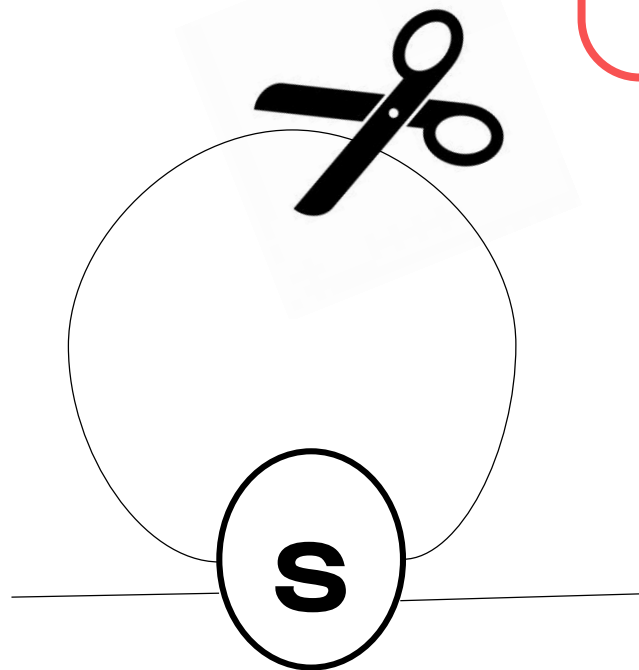
ss軌道をホモクリニック鞍点連結に置き換えたものをペアのss-saddle接続を伴った1-source-sink点につなげる操作



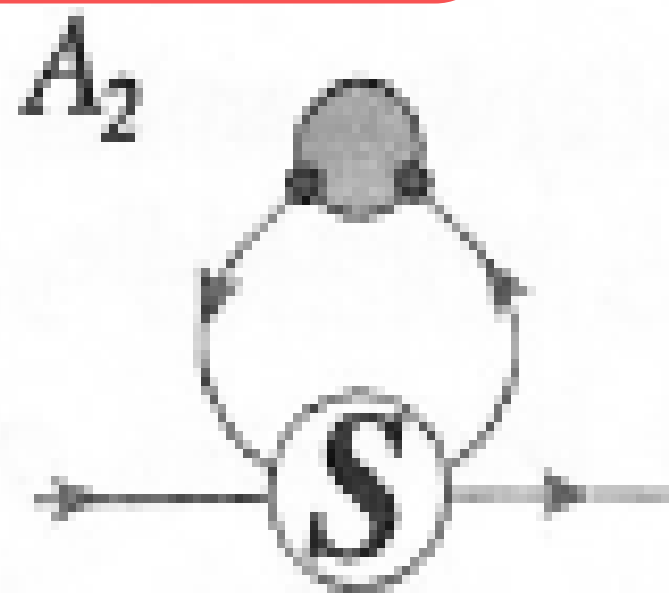
② 5つの操作 (five operations)

操作 A_2

ss軌道切って新しい円形の境界
(a circular boundary)をss-orbitの二
つの切った点につなげる操作



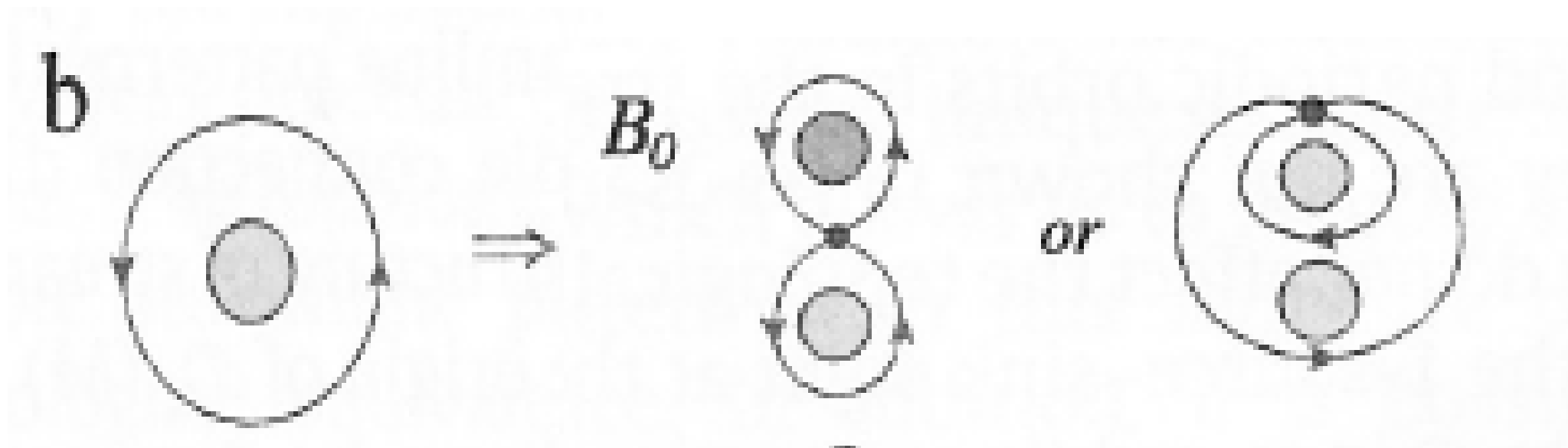
a circular boundary



② 5つの操作 (five operations)

操作 B_0

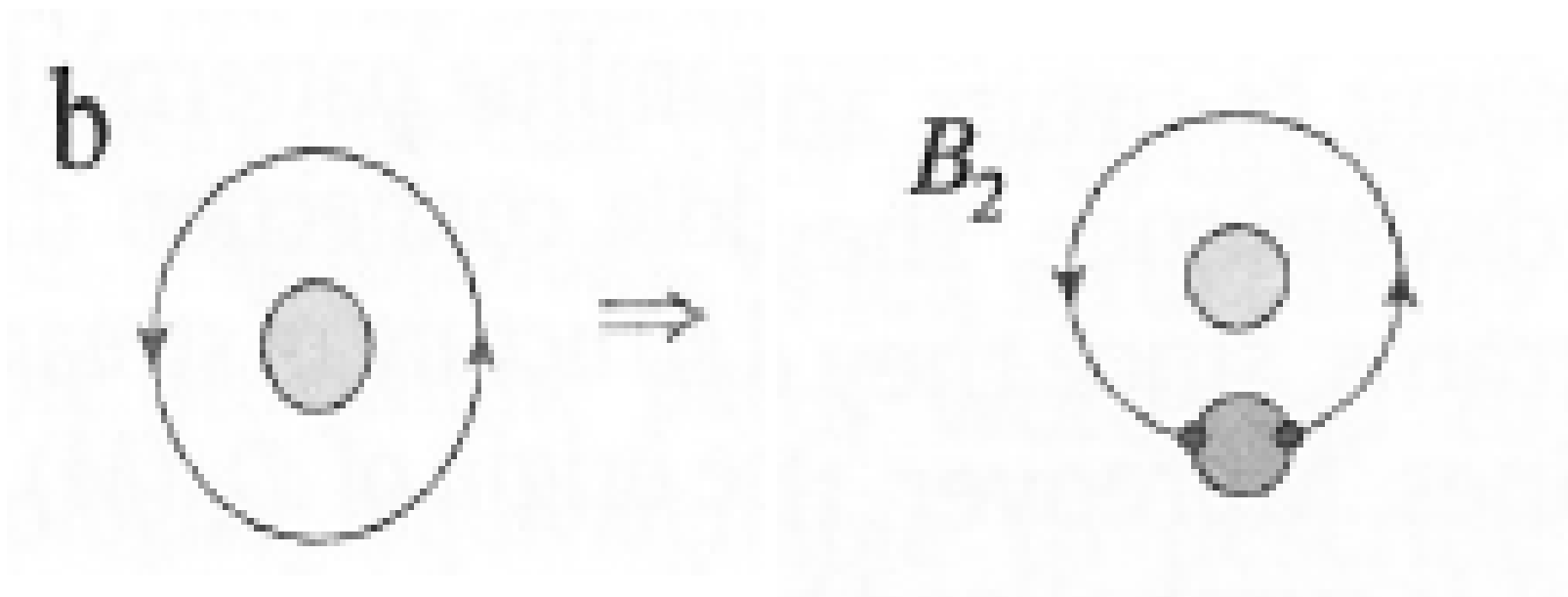
周期的な軌道を8の字パターンに置き換える操作



② 5つの操作 (five operations)

操作 B_2

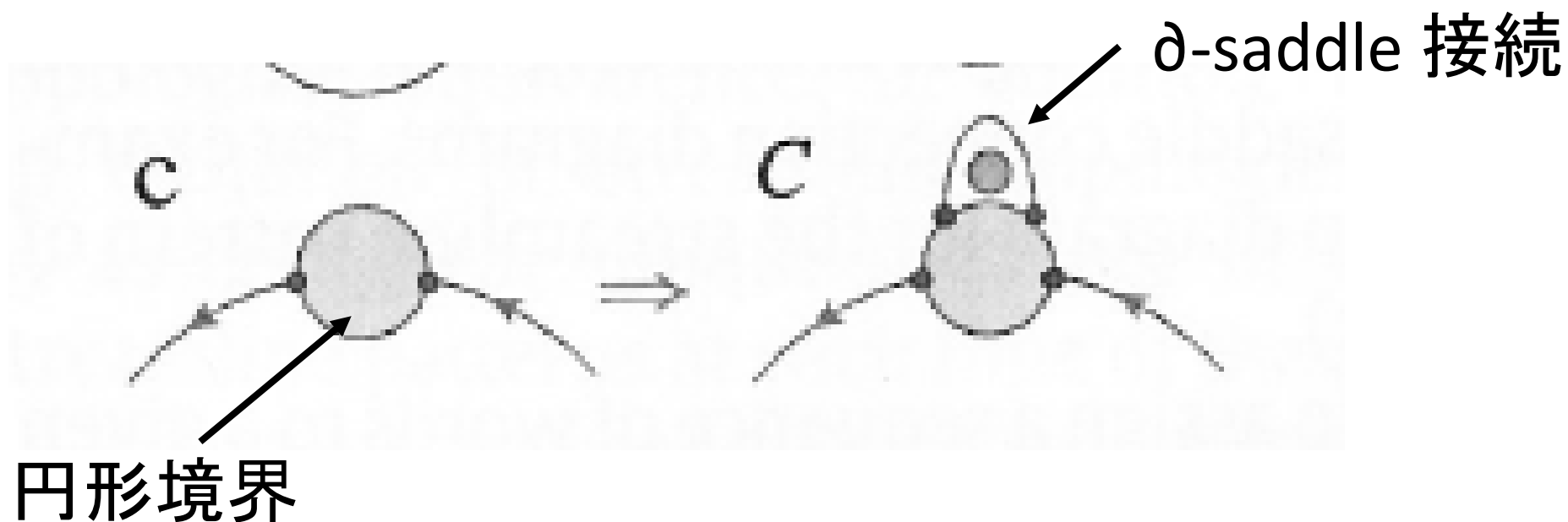
ss-saddle接続で円形境界を
置き換える操作



② 5つの操作 (five operations)

操作 C

新しい ∂ -saddle 接続を1つより多くの ∂ -saddleを伴った円形境界に加える操作



語表現

I、II、Oから始まるの配列



I -word、II -word、O-word

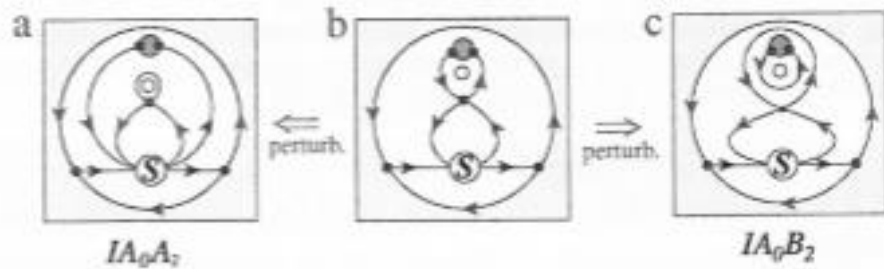


構造的安定なハミルトンベクトル場

the maximal I -word、the maximal II -word、
the maximal O-word

構造的に安定した2つのパターン間の一時的なリストの 組み合わせ方法を示す

※分岐による流線型の変化に対処することは出来ない



(b) は不安定な流線模様

IAA と IAB で表される2つの構造的に安定したパターン間の過渡状態

過渡的な流線形を2つの極大語 IAA と IAB から逆に求めることができるか

図4

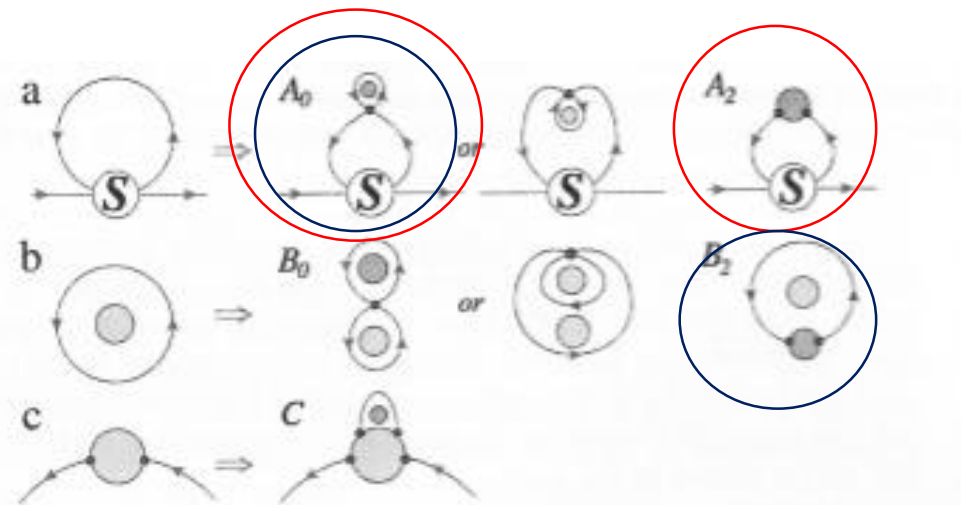
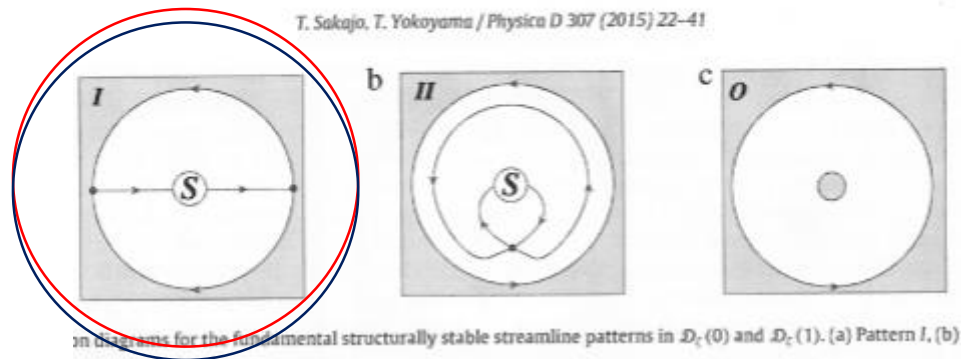
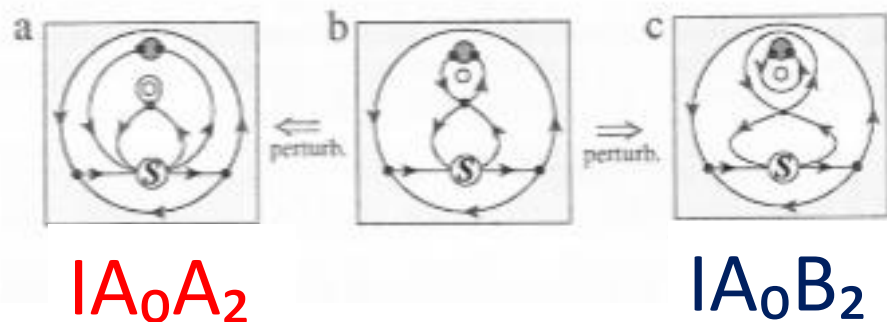


Fig. 3. Five operations A_0 , A_2 , B_0 , B_2 and C that increase the genus element by one, illustrated as a dark gray circular boundary, to the flow domain. Applying these operations to the fundamental structurally stable streamline patterns iteratively

↑ 図3

indexとsubwors

- maximal wordsとそれに対応する流線トポロジーを比較することで2つの安定的な移り変わりを特定

① index

定義2.3

$$A_0(W)=A_0 \quad a_2(W)=A_2 \quad b_0(W)=B_0 \quad b_2(W)=B_2 \quad c(W)=C$$

$$\text{ind}_0(W) = (0, 0, b_0(W), b_2(W), c(W)),$$

$$\text{ind}_I(W) = (a_0(W), a_2(W) + 1, b_0(W), b_2(W), c(W)),$$

$$\text{ind}_{II}(W) = (a_0(W) + 1, a_2(W), b_0(W), b_2(W), c(W)).$$

例

$$\begin{aligned} \text{ind}_{II}(A_0) - \text{ind}_{II}(B_0) &= (2, 0, 0, 0, 0) - (1, 0, 1, 0, 0) \\ &= (1, 0, -1, 0, 0) \end{aligned}$$

② subwords

定義2.4

maximal word

$$W = O_0 \overbrace{O_1 \dots O_k}^{A_0, A_2, B_0, B_2, C}$$

$O_0 \in \{0, I, II\}$

subword

$$S = O_{i_1} \dots O_{i_l} \quad 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq k$$

4. ホモクリシックペアを伴った流線パターン

4.1 1つずつgenus elementを増やす操作

- h-unstable*¹ パターンを作り出す操作の10種類は図9
- 安定的な流線パターン $D_z(M - 1)$ にgenus elementを付加

定義2.5*¹

h-unstable : 正規ハミルトンベクトル場

定義2.6

p-unstable : 非正規ハミルトンベクトル場

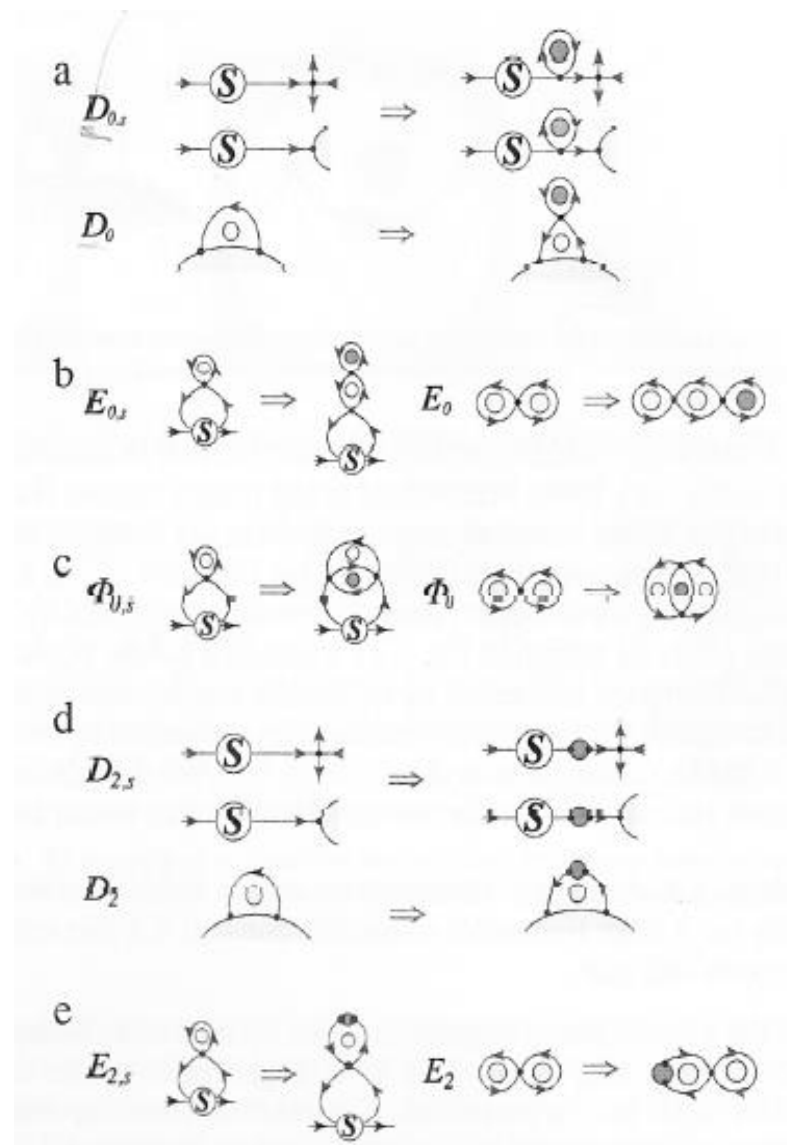


図9

操作 $D_{0,s}$ D_0

基本 I、II
操作 A_0 、 A_2

① $D_{0,s}$

ss- δ -saddle 接続あり

◆ 図10 (a)-(c) 真ん中

操作 $D_{0,s}$ によって生み出した h 不安定パターン
(h-unstable patterns*¹)

◆ 図10 (a)-(c) 右と左

摂動構造的安定パターン
(perturbed structurally stable patterns)

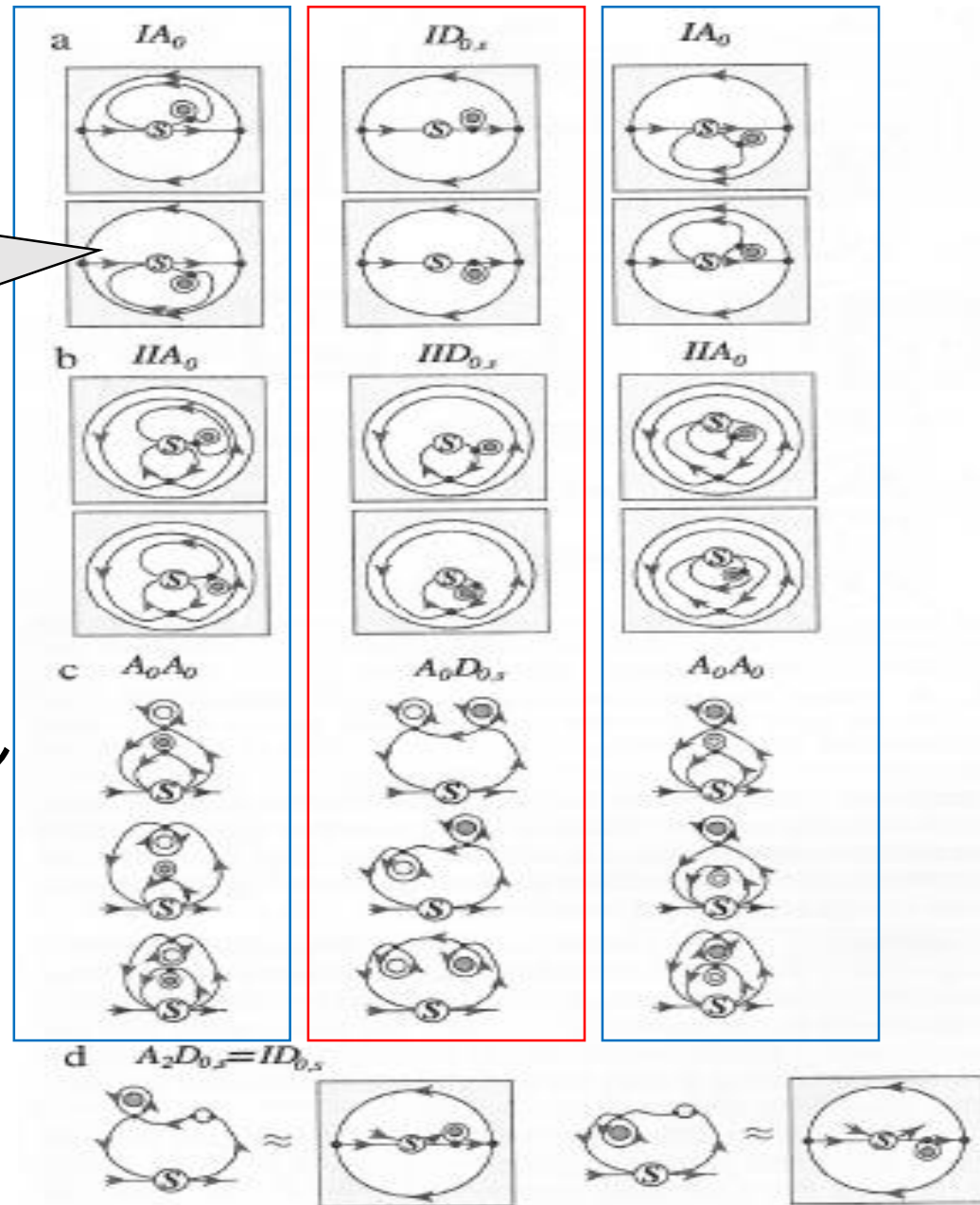


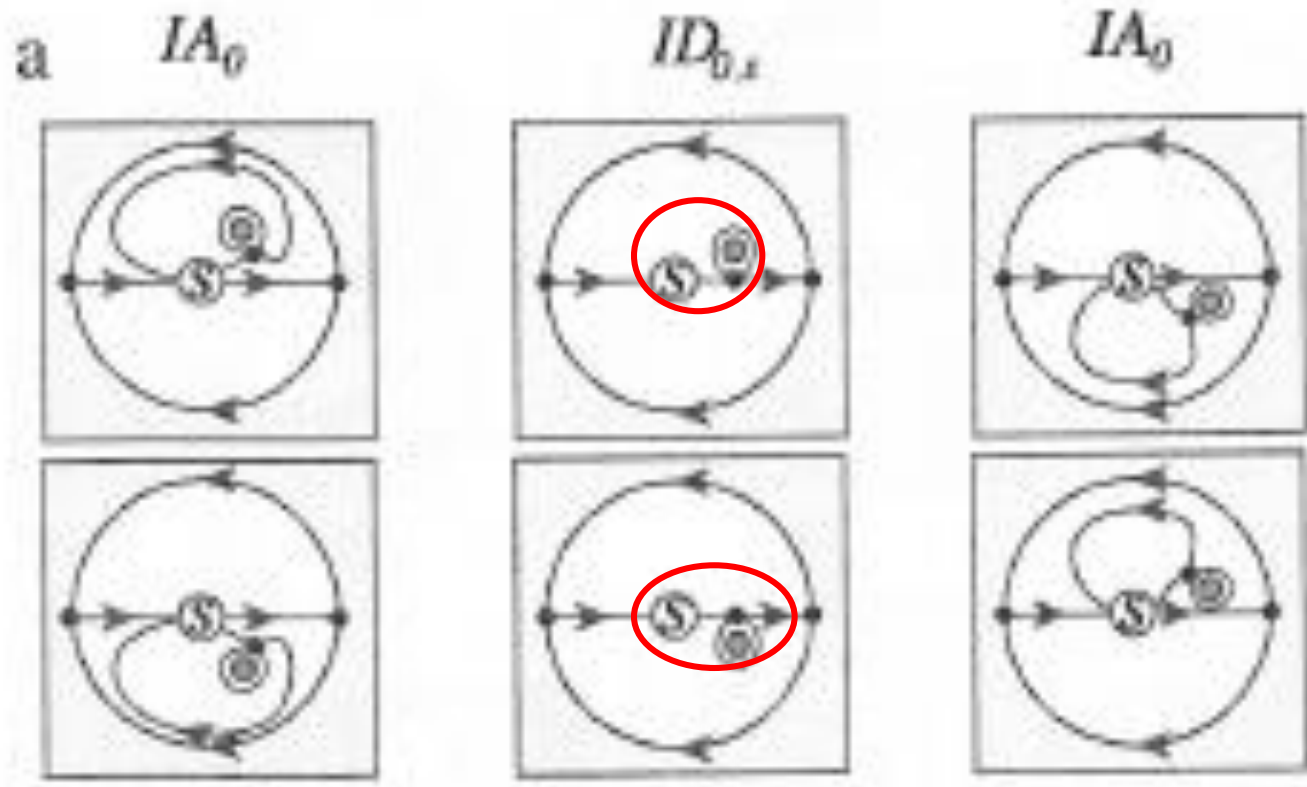
図10

(メモ)

$D_{0,s}$

新しい構造は流線パターンで1-source-sink点へ直接接続

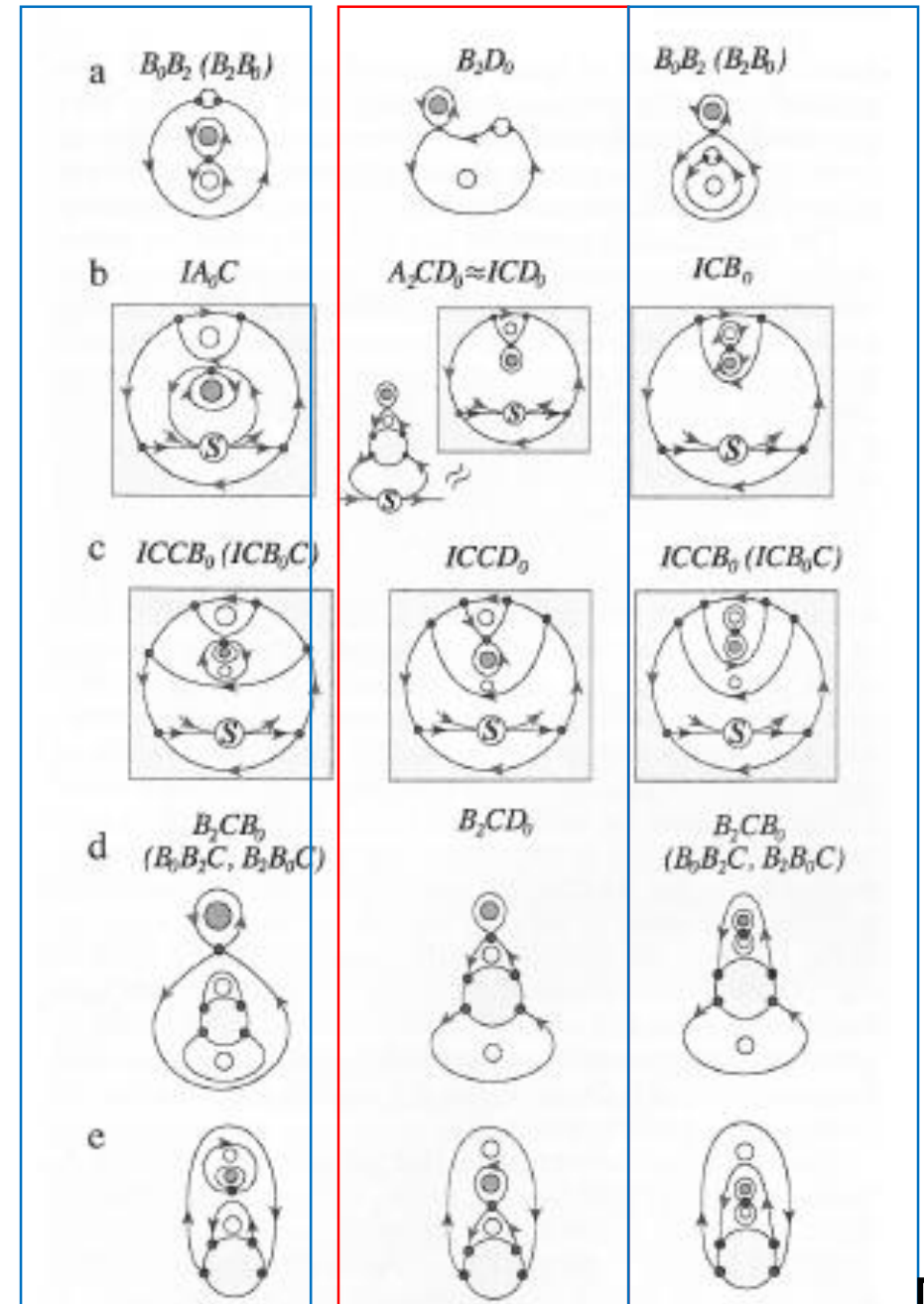
例



② D_0

- 操作 B_2 と C により生み出された ∂ -saddle に適応

* と の対応は①と同様



操作 $D_{0,s}$ D_0 のまとめ

操作 $D_{0,s}$ D_0 によって作られた h 不安定パターンは同じ単語表現により構造的に安定な流線パターンがもたらされることが分かった

* $I CD_0$ ($\approx A_2 CD_0$) は除く

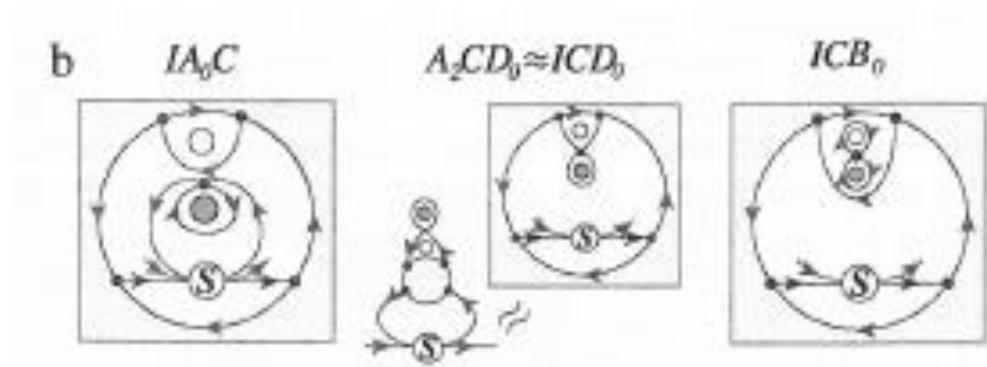


図11の一部

$$\text{ind } I (I A_0 C) - \text{ind } I (I C B_0) = (1, 1, 0, 0, 0) - (0, 1, 1, 0, 0) \\ = \underline{(1, 0, -1, 0, 0)}$$

d

$d=0$ でない \rightarrow 次ページテーブル1

テーブル1

Table 1

List of possible transitions between structurally stable Hamiltonian vector fields through a marginal h -unstable vector field. The h -unstable streamline pattern X with heteroclinic connections is a transient state between the two structurally stable vector fields represented by W_1 and W_2 , if $S_1 \subseteq W_1, S_2 \subseteq W_2$ and $\text{ind}_*(W_1) - \text{ind}_*(W_2) = d$ for $* \in \{O, I, II\}$ are satisfied.

Operation	X	S_1	S_2	d	Figure
$D_{0,s}$	$ID_{0,s} (\approx A_2 D_{0,s})$	$IA_0 (\approx A_0 A_2)$	$IA_0 (\approx A_0 A_2)$	0	10(a)
	$IID_{0,s}$	IIA_0	IIA_0	0	10(b)
	$A_0 D_{0,s}$	$A_0 A_0$	$A_0 A_0$	0	10(c)
D_0	$B_2 D_0$	$B_0 B_2, B_2 B_0$	$B_0 B_2, B_2 B_0$	0	11(a)
	$ICD_0 (\approx A_2 CD_0)$	$IA_0 C (\approx A_0 A_2 C)$	$ICB_0 (\approx A_2 CB_0)$	$(1, 0, -1, 0, 0)$	11(b)
	$ICCD_0$	$ICCB_0, ICB_0 C$	$ICCB_0, ICB_0 C$	0	11(c)
	$B_2 CD_0$	$B_2 CB_0$	$B_2 CB_0$	0	11(d)(e)
		$B_0 B_2 C, B_2 B_0 C$	$B_0 B_2 C, B_2 B_0 C$		

4.1 1つより多くgenus elementを増やす操作

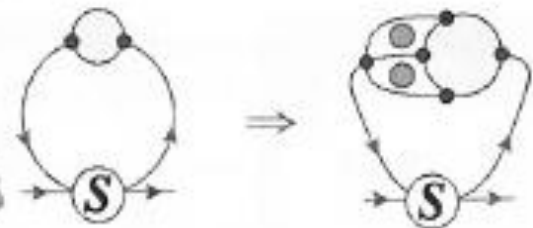
- h-unstable*¹ パターンを作り出す操作の4種類は図17

1-source-sinkあり

a

$\Psi_+(2)$

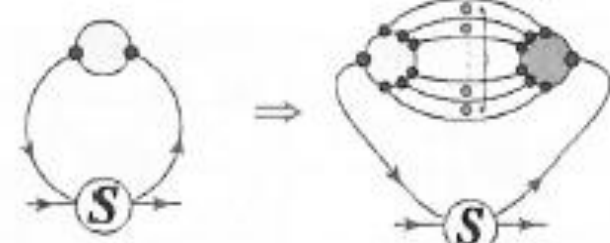
④かゝる



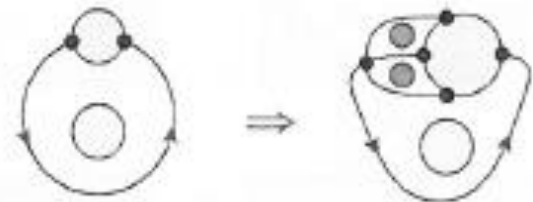
b

$\Xi_+(2n-1)$

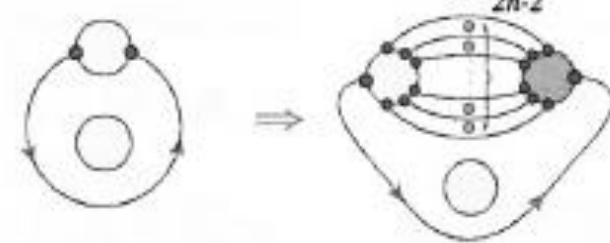
④かゝる



$\Psi(2)$



$\Xi(2n-1)$

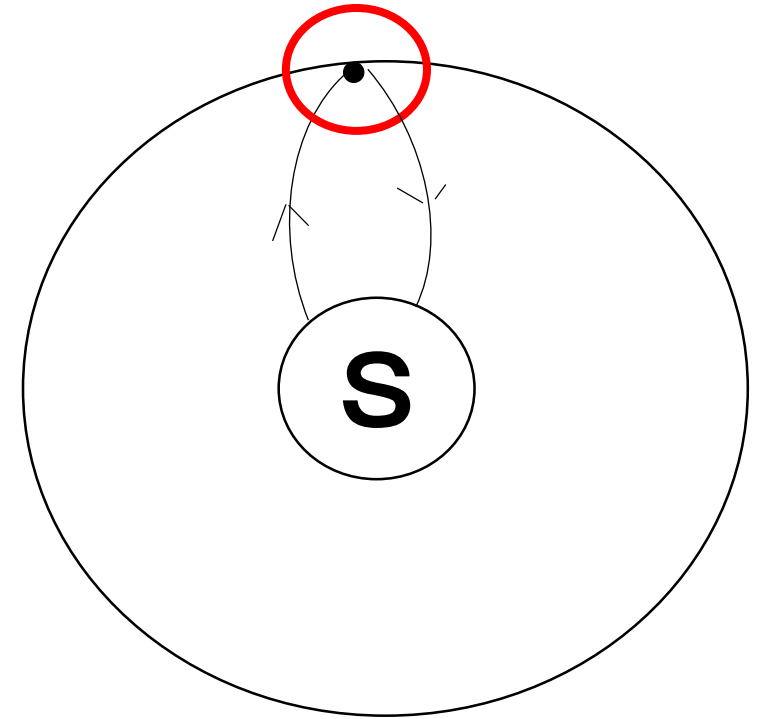
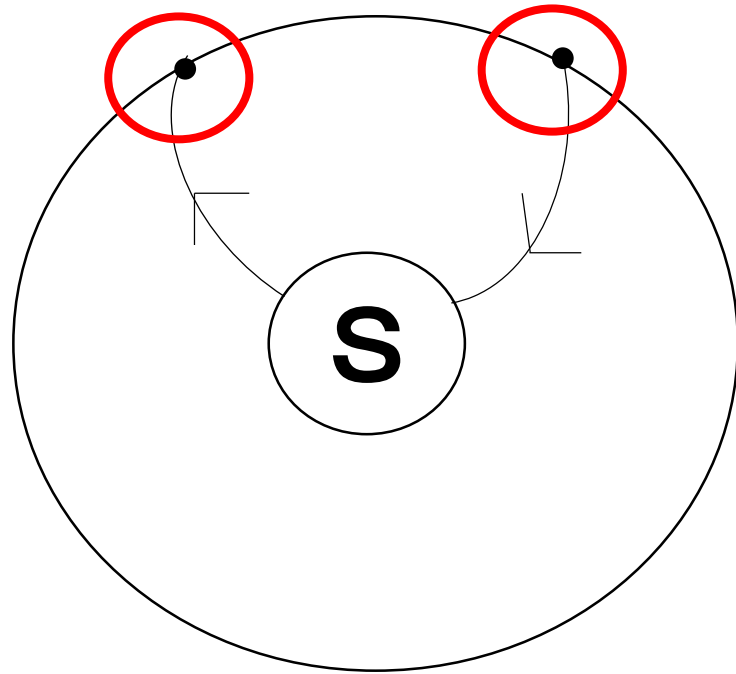


1-source-sinkなし

図17

5. ピンチングポイントを伴った流線パターン

ピンチングポイント (pinching point) とは？



操作 Δ_1 (デルタ)

構造的に安定したパターンの円形の境界にホモクリニック
ピンチング軌道を付ける操作

a homoclinic pinching orbit

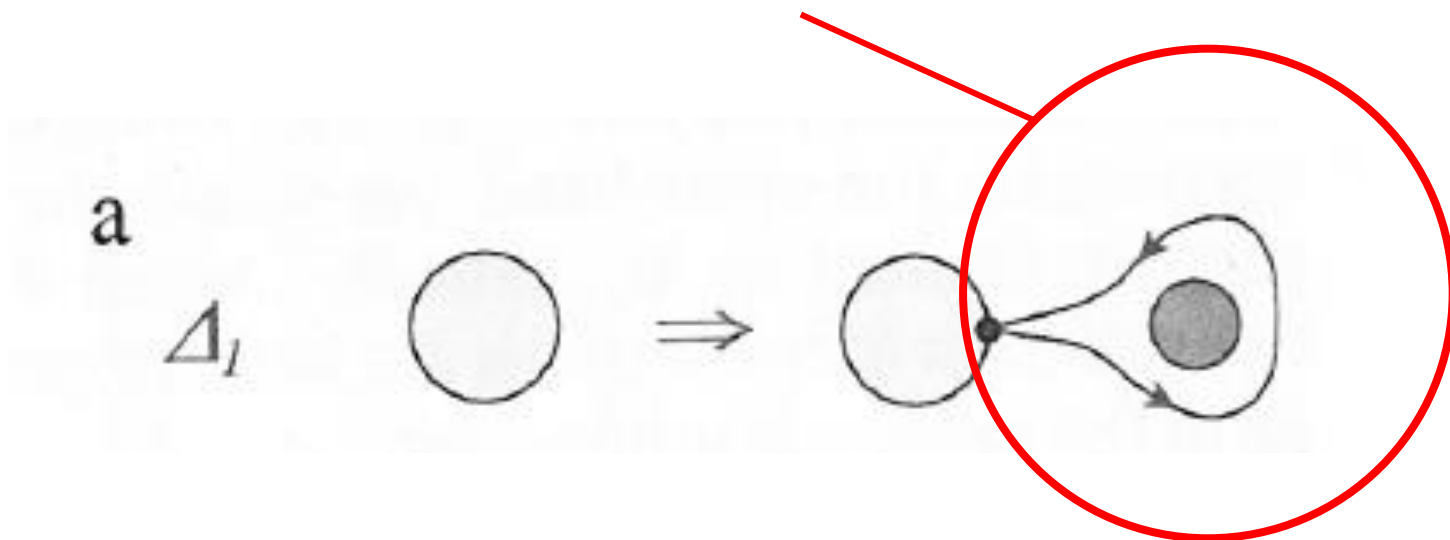


図22

操作 $M_{1,s}$

終点 (end point)をss- ∂ - saddle接続と同じ境界で分け合うことで ∂ - saddle接続を加える操作

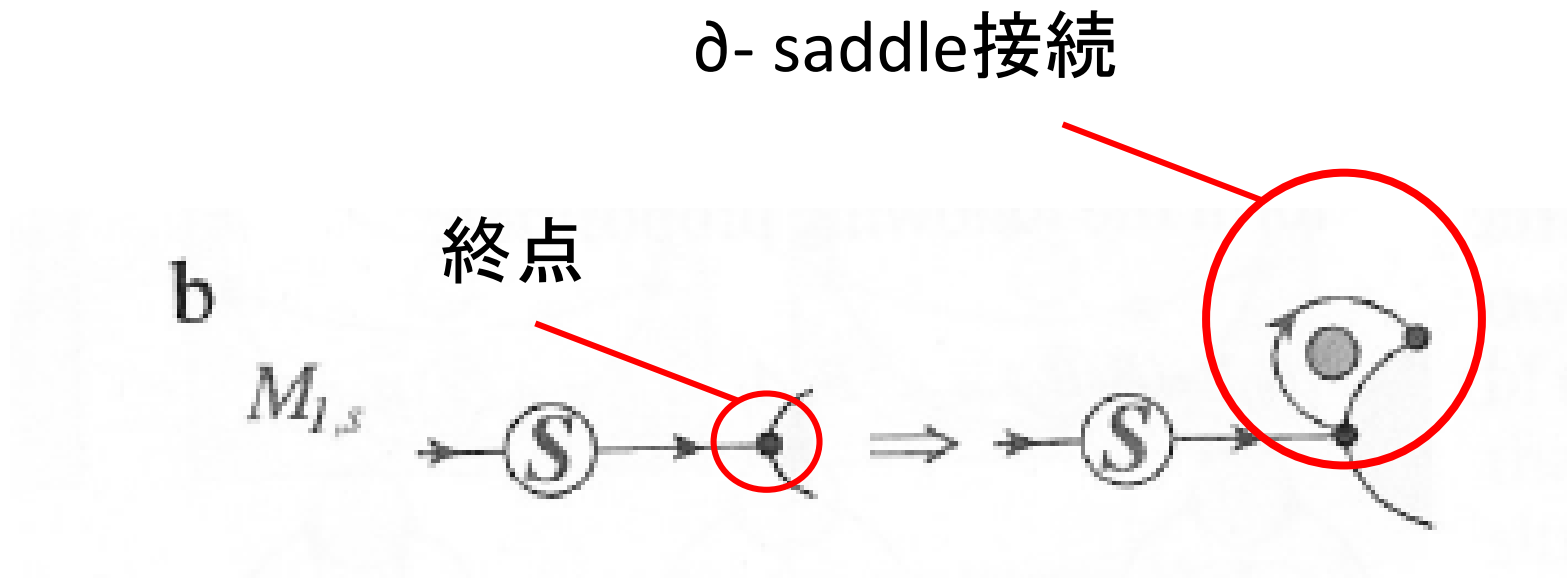


図22

操作 $M_{1,i}$ $M_{1,o}$

∂ -saddle接続を、ある ∂ -saddleともう一つの ∂ -saddleを同じ境界で分け合っている境界に加える操作

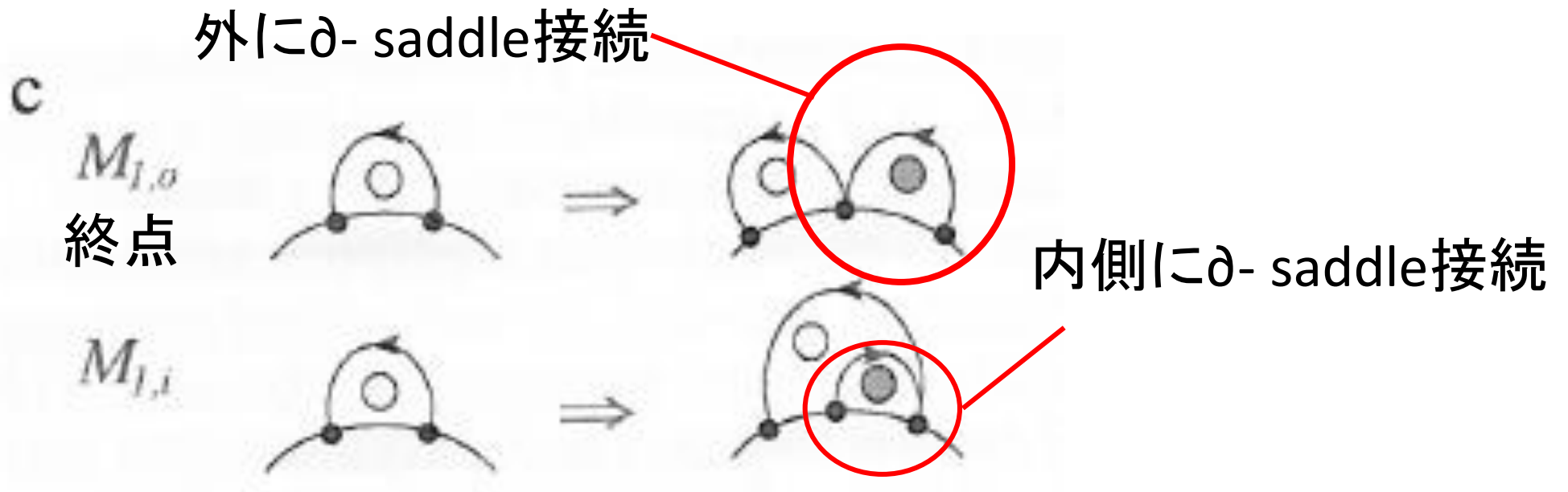


図22

6. 構造的に安定したハミルトンベクトル場間の移り変わり

- 1-source-sink 点のある、なしのために0-wordsと I -words、II -wordsの移り変わりは得られない
- 同じ数のgenus elementを伴う2つの構造的な安定なハミルトンベクトル場の単語表現を W_1 、 W_2 に与える
- (S_1, S_2, d) は $S_1 \subseteq W_1, S_2 \subseteq W_2$ 、 $\text{ind}^*(W_1) - \text{ind}^*(W_2) = d$ ($\star \in \{O, I, II\}$)が必要である

移り変わりグラフ (transition graph)

- グラフとして大域の移り変わりネットワークを視覚化

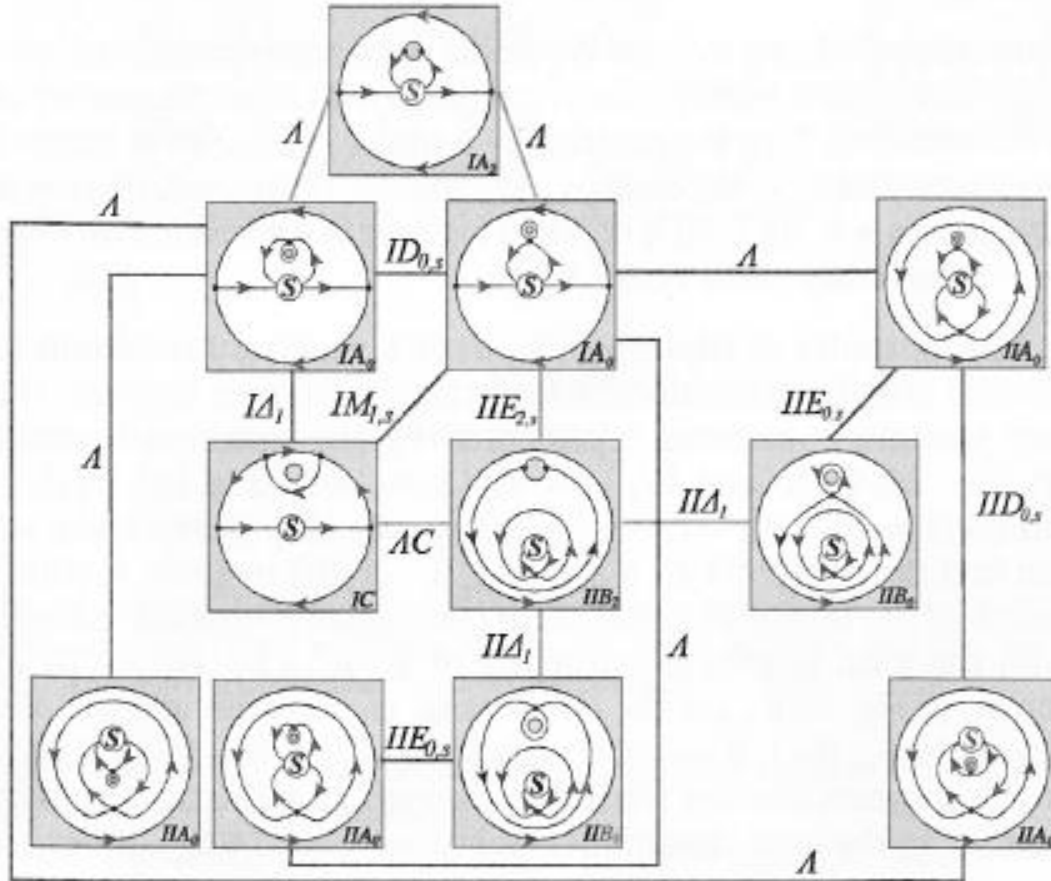


図17 $D_7(1)$ での1-source-sink 点を伴った構造的に安定なハミルトンベクトル場間の移り変わりグラフ

8. 圧縮できない流れへの応用

- 飛行機 翼の空気の流れ

- 図31の左はシミュレーション結果
- 図31の右はシミュレーションから抽出された流れパターンと単語表現

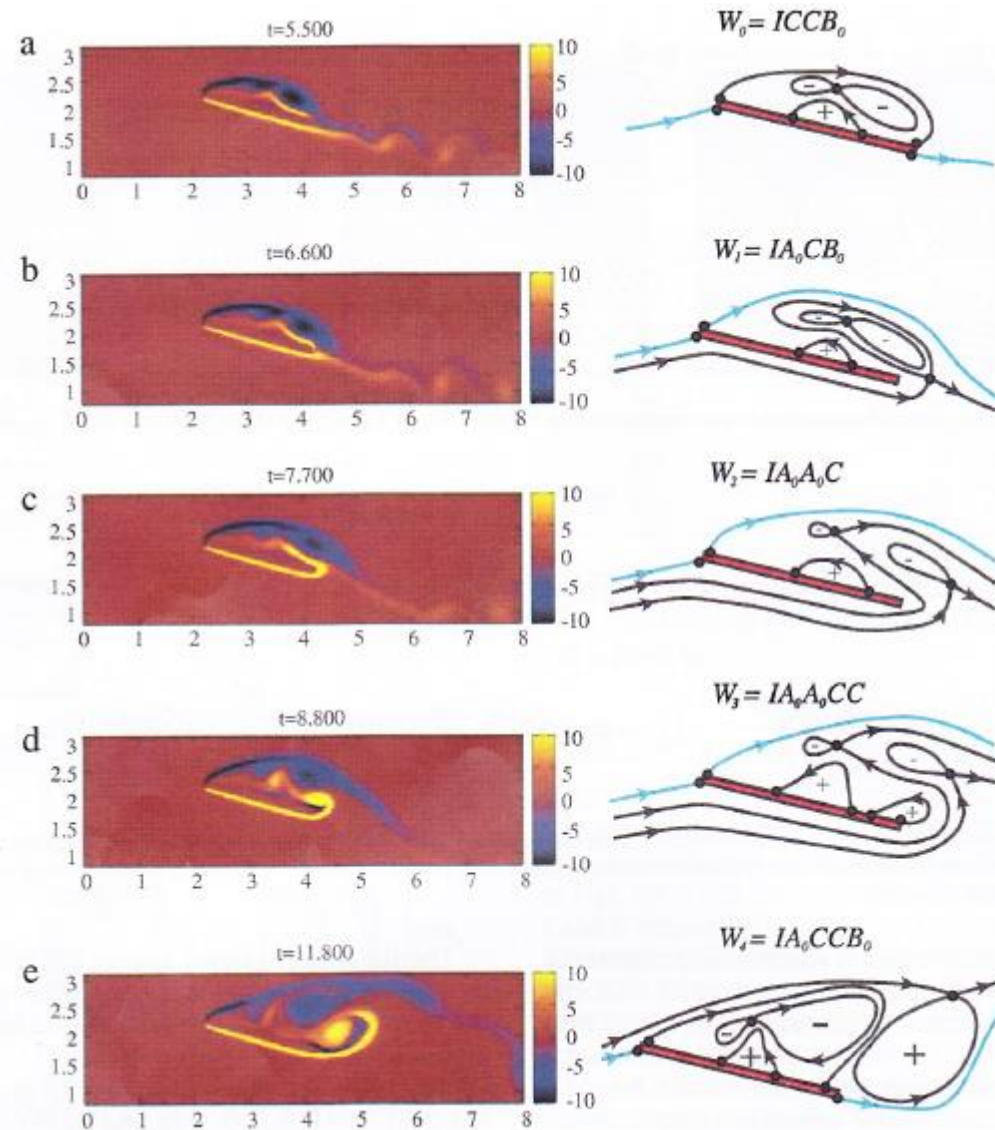


図31

8. 分からなかったこと（自分まとめ）

- ✓ 5つの操作でなぜ A_0 の次が A_2 なのか (B_0 、 B_2 も同様)
- ✓ 論文p.26の3. Structurally unstable Hamiltonian vector fieldsの内容理解が不足している
- ✓ Table1とTable2の理解ができていない

資料

Takashi Sakajo, Tomoo Yokoyama

『Transition between streamline topologies of structurally stable Hamiltonian flows in multiply connected domain』

Physica D 307 (2015) 22-41