

ハミルトニアンを利用した 二次元多重領域上の安定非圧縮流の可視化

2015SE055 永田 翔也

2016SE006 江崎 昂

2016SE031 加藤 晴海

指導教員 横山哲郎

流体の背景

流体力学: 流体の運動を研究対象とする力学の分野

数値解析: 方程式によって流体を数値的に分類.

メリット: 再現性が高いため実験ができない課題の解決に利用.

デメリット: 計算量, メモリ量が大きい.

離散解析: 二次元多重連結領域をトポロジーによって分類.

メリット: 計算量, メモリ量が小さい. 人間が視覚的理解しやすい.

デメリット: 流体を大まかに分類. 完全に分類可能.

背景: 流体力学

流体の運動を研究対象

- 数値解析: 方程式によって流体を数値的に分類
 - 再現性が高いため実験ができない課題の解決に利用
 - × 計算量とメモリ量が非効率的
- 離散解析
 -
 -
 - 二次元多重連結領域をトポロジーによる分類
 - 計算量とメモリ量が効率的, 視覚的理解が容易
 - × 流体の大まかな分類, 完全に分類可能

多重連結領域での非圧縮流れを表現する方法

語表現

区別しにくい流線の位相構造を分類することに優れている. 一つの語表現に対して複数の流線パターンが存在.

木文法

一つの流れに対して一つの記号列を対応, 流れの向きを表現

木表現の生成規則

$G = (S, N, F, R)$ によって定められる.

S 開始記号

N 非終端記号

F 終端記号

R 生成規則

$$S \rightarrow a_0(A^*) \mid b_{0+}(B_+, \{C_-^*\}) \mid b_{0-}(B_-, \{C_+^*\})$$

$$A \rightarrow l \mid a_+(B_+) \mid a_-(B_-) \mid a_2(C_+^*, C_-^*)$$

$$A^* \rightarrow \lambda \mid A \cdot A^*$$

$$B_+ \rightarrow l \mid b_{++}\{B_+, B_+\} \mid b_{+-}(B_+, B_-) \mid \beta_+\{C_+^*\}$$

$$B_- \rightarrow l \mid b_{--}\{B_-, B_-\} \mid b_{-+}(B_-, B_+) \mid \beta_-\{C_-^*\}$$

$$C_+ \rightarrow c_+(B_+, C_-^*)$$

$$C_- \rightarrow c_-(B_-, C_+^*)$$

$$C_+^* \rightarrow \lambda \mid C_+ \cdot C_+^*$$

$$C_-^* \rightarrow \lambda \mid C_- \cdot C_-^*$$

初期パターンと操作

パターンI, パターンII, パターンOの3つのパターンが存在.

パターンI,IIはM=0のときの構造安定な流れパターン, パターンOはM=1の吸い込み湧き出し対を持たないパターン.

A0, A2, B0, B2, Cの5つの操作が存在.

3つのパターンに流れの構造を追加して新たな構造安定な流れ作成する操作.

障害物 + 渦構造 + 停留点 = $M = 0$

M = 0 のとき初期状態

初期パターンと操作

3つのパターンI, II, Oが存在.

パターンI,IIはM=0のときの構造安定な流れパターン, パターンOはM=1の吸い込み湧き出し対を持たないパターン.

A0, A2, B0, B2, Cの5つの操作が存在.

3つのパターンに流れの構造を追加して新たな構造安定な流れ作成する操作.

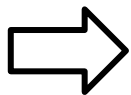
障害物 + 渦構造 + 停留点 = $M = 0$

M = 0 のとき初期状態

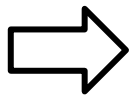
目的: 二次元多重連結領域上の安定非圧縮流の流れのトポロジーの可視化

人間の手で作図するのは
時間がかかる

木表現では流れの形状の
把握が難しい



関数で表現しておくことで楽
に作図可能



matlabなどの描画言語に関
数を打ち込むだけで作図可
能となれば把握がしやすい

準備 複素速度ポテンシャルとは

実数部分 → 速度ポテンシャル $\Phi(x,y)$

複素数部分 → 流れ関数 $\psi(x,y)$

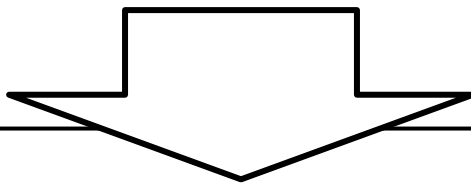
$$f(z) = \Phi + i * \psi \quad z = x + i * y$$

流体力学において二次元多重連結領域上の非圧縮流の解析に用いることができるポテンシャル

matlabを使った流れの作図 渦

matlab

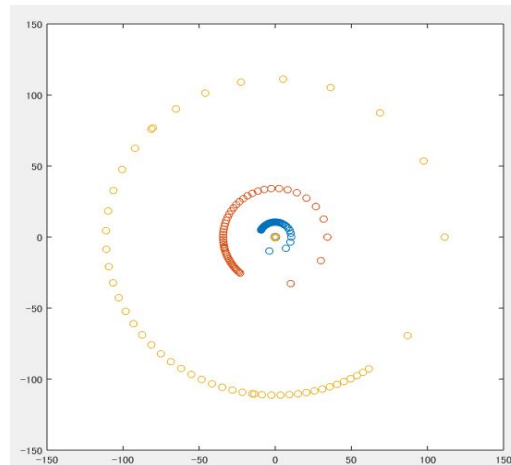
関数とデータの可視化が可能、今回は複素数ポテンシャルの流れを作図



左回りの渦

$$f(z) = -\text{imlog}(z)$$

- ・符号を負にすると右回り、正にすると左回り
- ・中心点 $(a,0)$ の場合 $\log(z-a)$



$f(z) = -i m \log(z)$ の解説

$f(z) = -i m \log(z)$ に $z = r e^{i\theta}$ を代入し、

複素速度ポテンシャル Φ

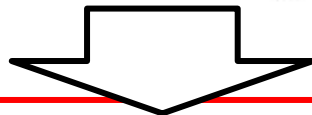
$$\Phi = m\theta$$

流れ関数 ψ

$$\psi = -m \log(r)$$

r 、 θ 方向の速度成分

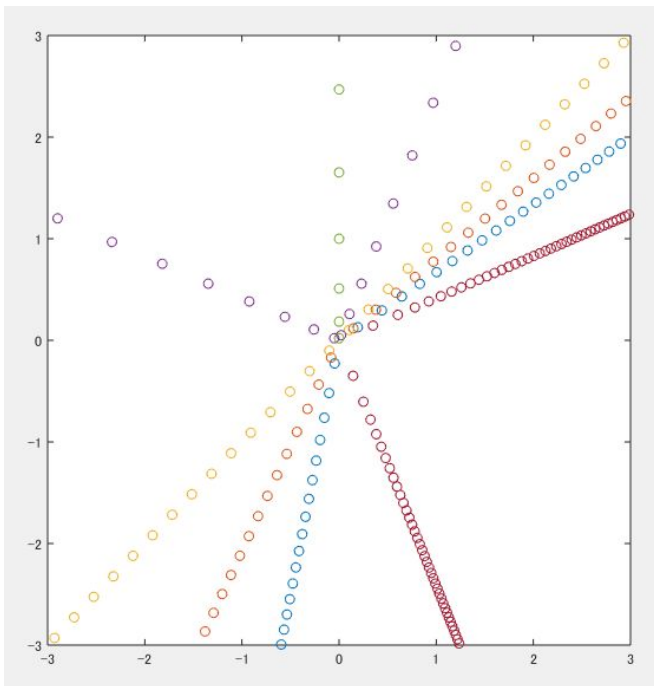
$$v_r = \frac{\delta\Phi}{\delta r} = \frac{1}{r} \frac{\delta\Phi}{\delta\theta} = 0 \qquad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\delta\Phi}{\delta\theta} = -\frac{\delta\psi}{\delta r} = -\frac{m}{r}$$



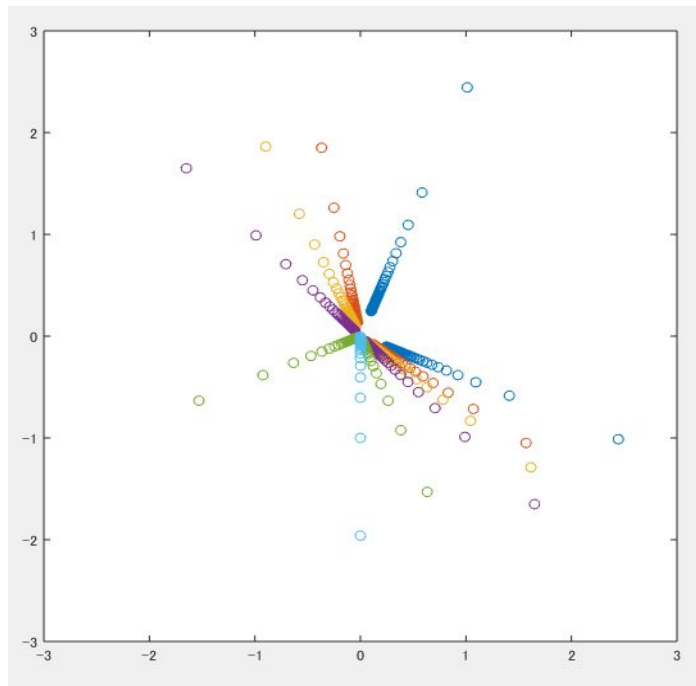
原点を中心とする反時計回り方向の旋回流れとなる

matlabを使った流れの作図 吸い込み & 湧き出し

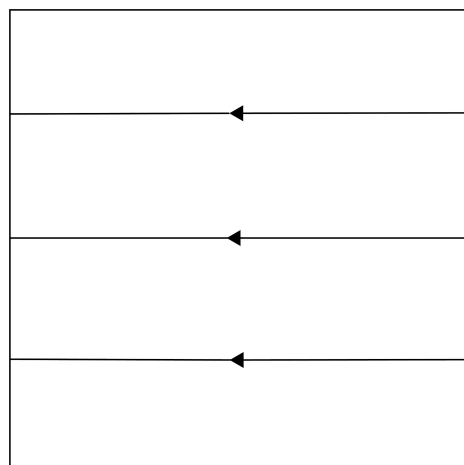
吸い込み $-\log(z)$



湧き出し $\log(z)$

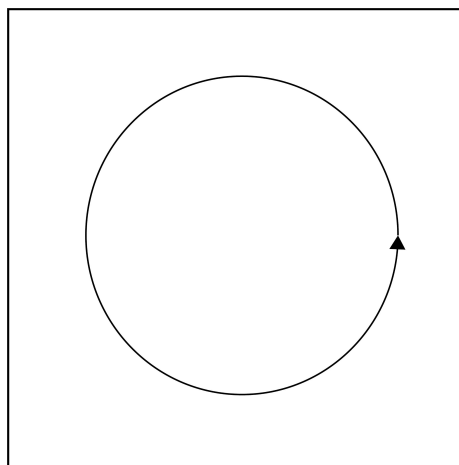


複素速度ポテンシャルを利用した木表現の初期パターン A系



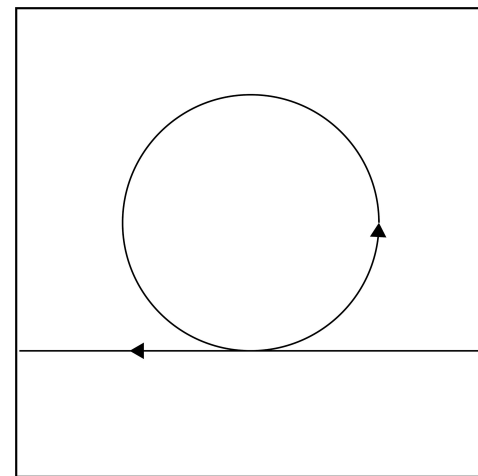
一様流
 Uz

+



左回りの渦
 $-i m \log(z)$

=

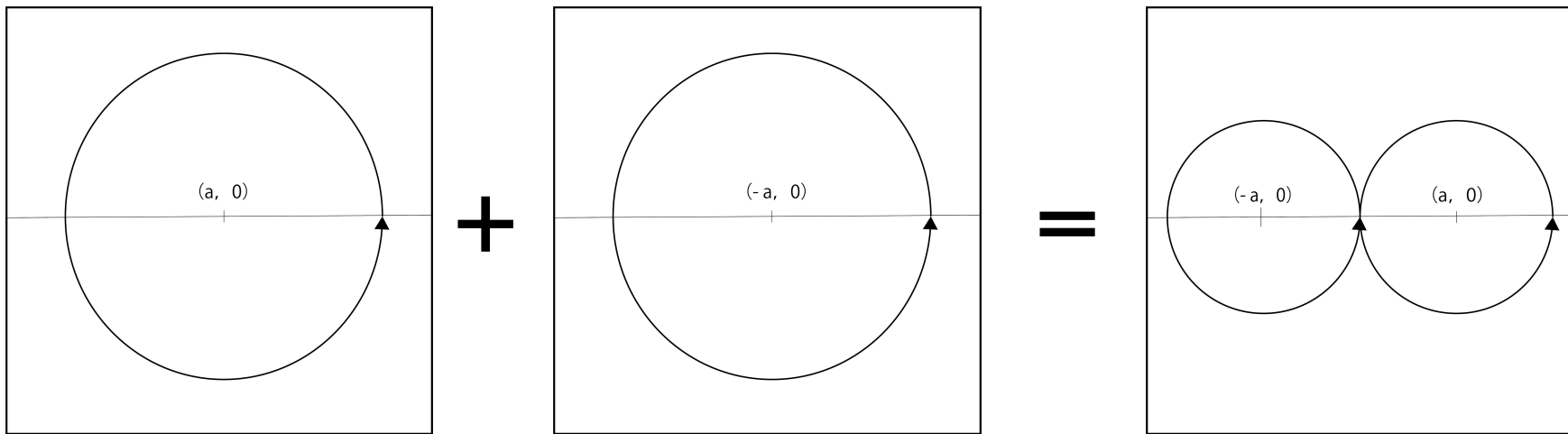


初期パターン $a+$
 $Uz - i m \log(z)$

複素速度ポテンシャルを利用した木表現の初期パターン A系

a+	$Uz - i \operatorname{mlog}(z)$	a-	$Uz + i \operatorname{mlog}(z)$
a2	穴を半径 a で中心点 $(0,0)$ の円とする $i \operatorname{mlog}(z-a) + i \operatorname{mlog}(z+a)$		

複素速度ポテンシャルを利用した木表現の初期パターン B系



左回り渦

$-i \operatorname{mlog}(z - a)$

左回り渦

$-i \operatorname{mlog}(z + a)$

初期パターンb++

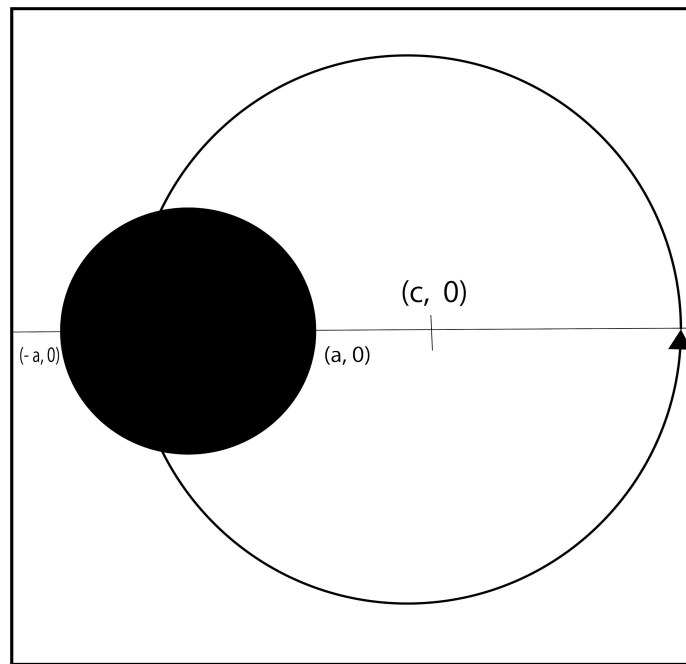
$-i \operatorname{mlog}(z - a) - i \operatorname{mlog}(z + a)$

複素速度ポテンシャルを利用した木表現の初期パターン B系

b++	$-i \operatorname{mlog}(z+a) - i \operatorname{mlog}(z-a)$	b--	$i \operatorname{mlog}(z-a) + i \operatorname{mlog}(z-a)$
b+-	$a < b$ のとき $i \operatorname{mlog}(z+a) - i \operatorname{nlog}(z+b)$	b-+	$a > b$ のとき $i \operatorname{mlog}(z-a) - i \operatorname{nlog}(z-a)$
$\beta+$	穴を半径 acm 中心点 $(0,0)$ の円とすると $-i \operatorname{mlog}(z)$	$\beta-$	穴を半径 acm 中心点 $(0,0)$ の円とすると $i \operatorname{mlog}(z)$

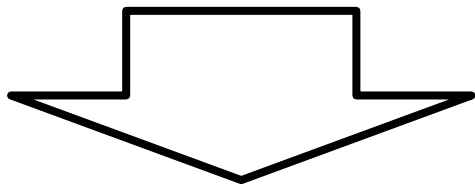
複素速度ポテンシャルを利用した木表現の初期パターン C系

C+	穴を半径 acm で中心点 $(0,0)$ の円とし、 $-1/2a < c$ とするとき $f(z) = -i m \log(z \pm c)$
C-	穴を半径 acm で中心点 $(0,0)$ の円とし、 $-1/2a < c$ とするとき $f(z) = i m \log(z \pm c)$

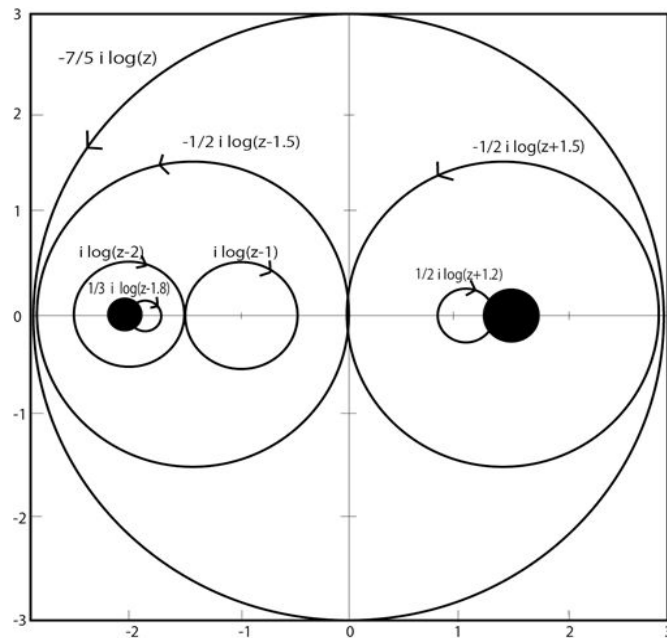


初期パターンの組み合わせを複素速度ポテンシャルで表現

$$b\Phi+(b++\{b++\{l,l\},c-(l,l)\},c-(l,l))$$



$$f(z) = -7/5 i \log(z) - 1/2 i \log(z-1.5) - 1/2 i \log(z+1.5) + i \log(z-2) + i \log(z-1) + 1/3 i \log(z-1.8) + 1/2 i \log(z+1.2)$$



有界単連結領域内での流れの遷移

円板上での構造安定で非圧縮な流れの変換規則を木文法によって定める

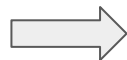
淀み点の個数が保存されるようなトポロジー的な変化のみを考える

閉円板上の非圧縮流の遷移

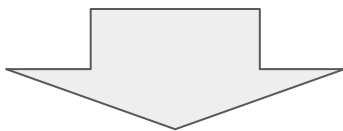
淀み点同士がくっつく

異なる2つの淀み点を繋ぐ軌道がくっつく

淀み点の数が増減する場合は考えない

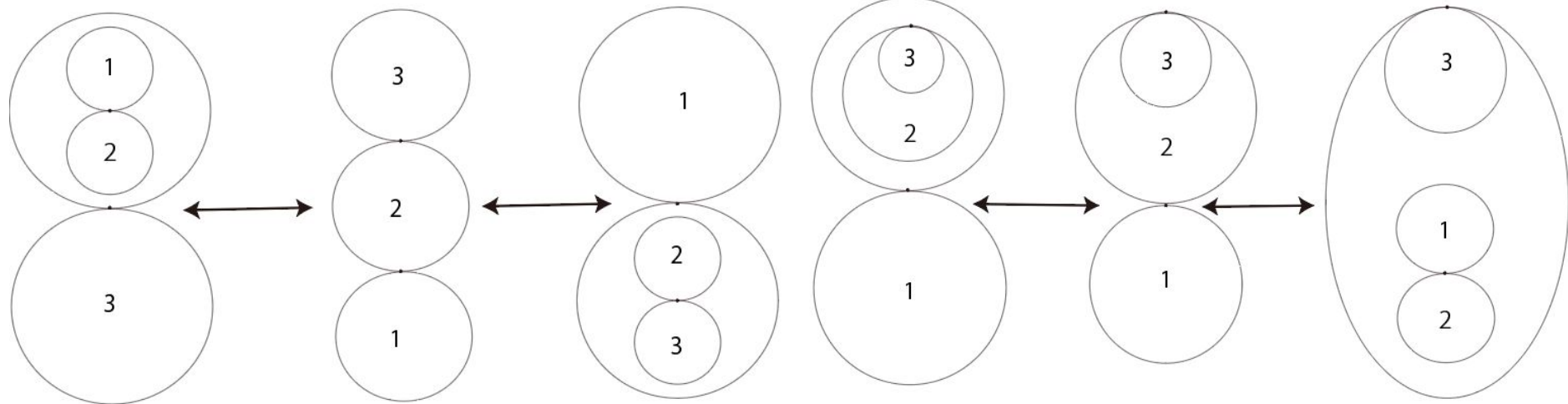


流れが遷移する



構造安定でない流れに変化した後、他の構造安定な流れにする

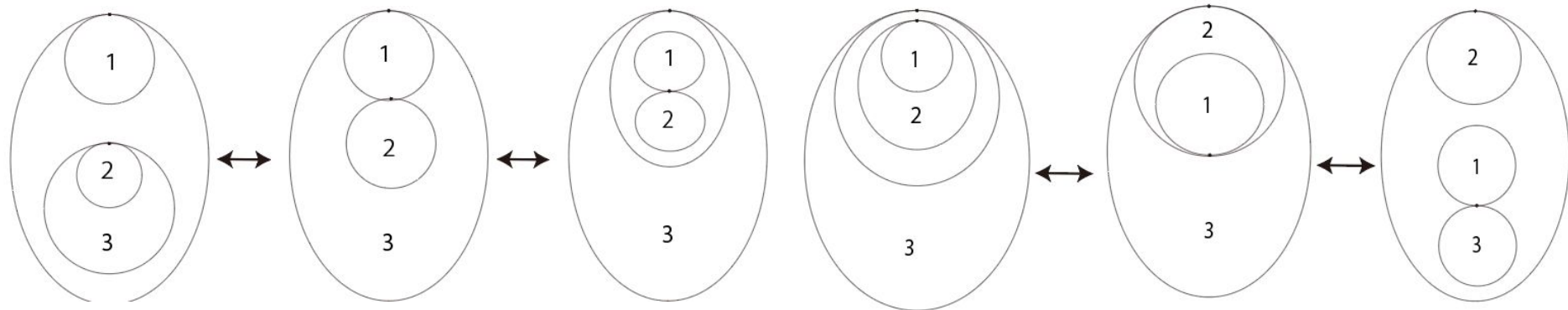
変換規則



変換規則1

変換規則2

変換規則

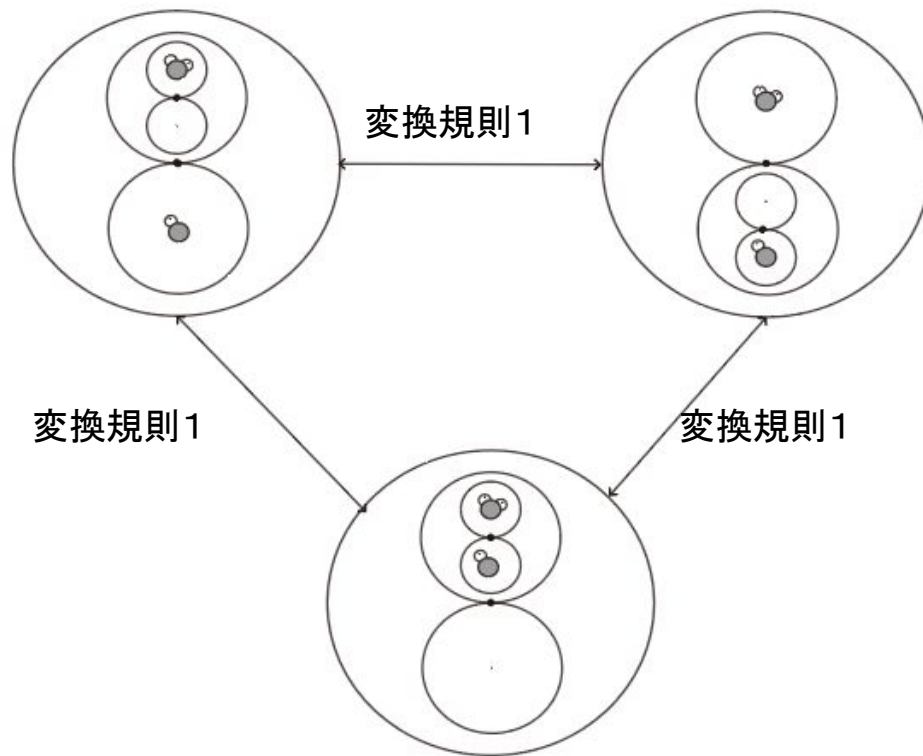
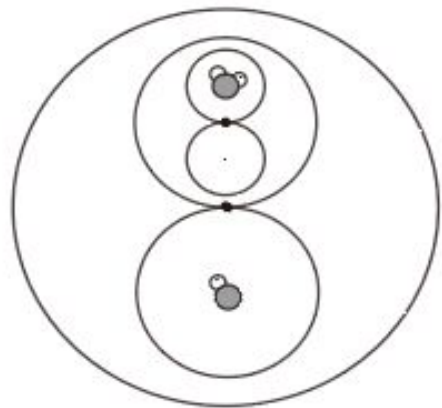


変換規則3

変換規則4

流れの遷移図

例) 下図の流れを変換規則に従って変換させ、左図のグラフを得る



まとめ

- ・matlabを使って流れの作図を行った
- ・木表現の初期パターンを複素速度ポテンシャルで表現した
- ・生成規則をもとに複数の流れの組み合わせを複素速度ポテンシャルで表現した

問題点

流れの関数を単独ならmatlabで作図出来るが複数の流れを組み合わせた関数は作図することができていない

参考文献

- [1]加藤舞、内藤綾香:多重連結領域上の安定非圧縮流の解析
- [2]横山哲郎、横山知郎:ハミルトン局面流に対応する流れの向きを考慮した極大語の列挙アルゴリズム
- [3]横山哲郎、横山知郎:有界単連結領域上の非圧縮流の遷移
- [4]荒井迅:トポロジカルな流れ構造の理解に向けて.
- [5]坂上貴之、横山知郎、沢村陽一:二次元多重領域内における構造安定な非圧縮流れの文字表現アルゴリズム
- [6]横山哲郎、横山知郎:多重連結領域上の非圧縮流を表す木文法の深化