

ハミルトニアンを利用した二次元多重連結領域上の安定非圧縮流の可視化

2015SE055 永田 翔也 2016SE006 江崎 昂 2016SE031 加藤 晴美

指導教員 横山 哲郎

1 はじめに

流体力学は流体の運動を研究対象とする力学の一分野であり、その解析方法の代表的なものに数値解析と離散解析がある。再現性の高さ、条件設定の容易さから数値解析は事故や災害などの実験不可能な課題を解決することに適しており、従来の実験の多くが数値解析で行われているが、必要となる計算量、メモリ量は大きくなる欠点がある。離散解析は二次元多重連結領域をトポロジーによって分類することで流体の構造を大まかな見方によるものであるが完全な分類が可能となり、また数値解析に比べて直感的に理解しやすい。その離散解析の研究の一つの例としてトポロジーの分類を極大語によって表現する研究がある。しかし、語表現によって行われる多重連結領域上の安定非圧縮流の流れを記号列で表す方法は区別しにくい流線の位相構造を分類することに優れているが、語表現の特徴に加えてより多くの流れの向きを考慮した木表現が語表現の発展形としてある。語表現には一つの語表現に対して複数の流線パターンが存在してしまう欠点が生じていたが木表現は一つの流れに対し一つの記号列を対応させることでその欠点が生じることなく流れの向きを表現できるため語表現よりも高い表現力を持つといえる。木文法を用いた流体の特徴の表現力の調査を行った研究では木表現は語表現よりも多くの流れの特徴を捉えることが可能であるという結果が得られた。

本研究では、木表現によって表現された流れを関数で表現することで流れの可視化を容易にし、木表現だけではとらえきれない形状の把握を目指す。

2 関連研究

2.1 前提条件

本研究は前提条件を多重連結領域上で非圧縮性、非粘性の性質を持つ構造安定な流れであることとし、以下に前提条件についての説明をする。一つの障害物を持つ領域を単連結領域、複数の障害物を持つ領域のことを多重連結領域という。非圧縮性は連続体の密度が変形の前後も変化せず常に一定である性質、非粘性は力に対する抵抗のない性質であり、この二つの性質を持つ流体のことを理想流体という。構造安定性は小さな乱れが加わっても

構造が変化しない性質で流れの研究においては流れのトポロジーが変化しないことをいう。トポロジーは形を変形させても変わらない性質のことで例を上げると浮輪とカップはトポロジー的にいえば変形すれば同じといえるが、浮輪は変形してもボールにはならない。

2.2 初期パターン

初期パターンとは、障害物、渦構造、停留点の合計 M が 0 または 1 個の構造安定な流れの初期構造となるもので M が 0 個の構造安定な流れはパターン I とパターン II の 2 パターン存在する。パターン I は吸い込み湧き出し対から出る 2 つの $ss-\delta$ -saddle connections を持つ。パターン II は吸い込み湧き出し対から出る 2 つの $ss-\delta$ -saddle connections に加え homoclinic saddle point を持つ。また、吸い込み湧き出し対を持たない流れの他に M が 1 個の構造安定な流れパターン O が存在する。パターン O は closed orbits を持つ流れである。以上の 3 つのパターンを初期パターンとする。

2.3 五つの操作

構造安定な流れの流線に対して M を 1 つとそれに伴う流れの構造を追加することで新たに構造安定な流れを作る操作のことを 5 つの操作と呼ぶ。(初期パターンの節)の構造的に安定を維持しながらこれらを可能にする操作は 5 つしかないとされている。

2.4 木文法

開始記号 S 、非終端記号の集合 $N = \{S, A, B+, B-, C+, C-, C*+, C*- \}$ 、終端記号の集合 $F = F\epsilon \cup FA \cup FB \cup FC \cup \{1, \lambda, \text{cons}(\cdot, \cdot)\}$ 、生成規則 R である。終端記号 F は、 $F\epsilon = \{a(), b+(\cdot, \{\cdot\}), b-(\cdot, \{\cdot\})\}$ 、 $FA = \{a+(\cdot), a-(\cdot), a2(\cdot)\}$ 、 $FB = \{b++\{\cdot, \cdot\}, b+-(\cdot), b--\{\cdot, \cdot\}, b-+(\cdot), \beta+\{\cdot\}, \beta-\{\cdot\}\}$ 、 $FC = \{c+(\cdot), c-(\cdot)\}$ とそれぞれが初期パターン、A 系、B 系、C 系の操作によって現れる流線図を表している。生成規則は図 2.1 のように表す。

3 準備

本研究では、木表現で表現された流れを関数で表現することを目指す。そのために複素速度ポテンシャルを使用し流線の定義を行う。そして、本章で

は複素数ポテンシャルはどのようなものか解説を行う。また、複素速度ポテンシャルで定義した関数を可視化する方法として、描画ソフト matlab を利用する。

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow a_0(A^*) | b_{0+}(B_+, \{C_+^*\}) | b_{0-}(B_-, \{C_+^*\}) \\
 A &\rightarrow l | a_+(B_+) | a_-(B_-) | a_2(C_+^*, C_-^*) \\
 A^* &\rightarrow \lambda | A \cdot A^* \\
 B_+ &\rightarrow l | b_{++}\{B_+, B_+\} | b_{+-}(B_+, B_-) | \beta_+\{C_+^*\} \\
 B_- &\rightarrow l | b_{--}\{B_-, B_-\} | b_{-+}(B_-, B_+) | \beta_-\{C_-^*\} \\
 C_+ &\rightarrow c_+(B_+, C_+^*) \\
 C_- &\rightarrow c_-(B_-, C_-^*) \\
 C_+^* &\rightarrow \lambda | C_+ \cdot C_+^* \\
 C_-^* &\rightarrow \lambda | C_- \cdot C_-^*
 \end{aligned}$$

図 2.1

3.1 流れ関数

流れ関数とは、ある流線を基準とし、他の流線の流量を尺度（スケール）とする関数である。図 1 (a) のような二次元多重連結領域上の非圧縮流について考える。二つの基準となる流線を s_1, s_2 とし、この二つの流線の間を $e \sim e'$ や $f \sim f'$ のような任意の断面積を通過する流量は常に等しくなる。このことを利用して流れ関数を定義することが可能である。

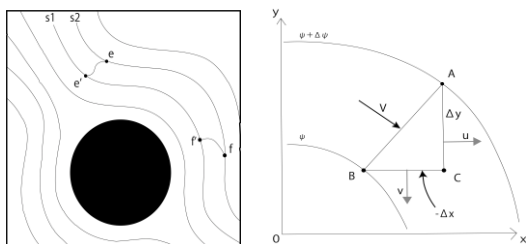


図 3.1 (a) (b)

図 3.1(a) の流れ場の拡大図を (b) に示す。任意の流線を表す流れ関数を ψ とし、この流線上の点 A から垂直に Δk 移動させた点 B を通る流線を表す流れ関数を $\psi + \Delta \psi$ とする。図に示すように、線分 Δk と速度 V の方向は直角となり、流れ関数の定義より

$$\Delta \psi = V \Delta k \quad (3.1)$$

となる。次に図 (b) に示すように V を u, v に、 Δk を $-\Delta x, \Delta y$ に分解する。分解した値を (3.1) に代入して考えると

$$\Delta \psi = V \Delta k = u \Delta y - v \Delta x \quad (3.2)$$

となり、この極限をとると

$$d\psi = u dy - v dx \quad (3.3)$$

となる。この流れ関数 ψ は、二次元座標平面上の流線を表すことが可能であり次のように表すことが出来る。

$$\psi = \psi(x, y) \quad (3.4)$$

これを全微分すると

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy \quad (3.5)$$

式 (3.3) と (3.5) より dx と dy の係数は等しくなる。よって

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.6)$$

となる。

3.1.2 速度ポテンシャル

速度ポテンシャルとは、流体力学において渦無し流れの解析する場合に用いられる。渦無し流れとは流れのいたるところで渦度がゼロである流れのことであり、流れの中に渦の存在を調べる際に使用する概念を循環という。循環は、流れ場の閉曲線に沿う速度の線積分である。速度成分を u, v とし、循環を次に定義する。

$$\oint V \cdot ds = \int (u dx + v dy) = \Phi(S) \quad (3.7)$$

この関数を速度ポテンシャル (velocity potential) とする。次に、点 $S(x, y)$ から Δx だけ x 軸の正方向に移動させた点 $T(x + \Delta x, y)$ 、 Δy だけ y 軸の正方向に移動させた点 $U(x, y + \Delta y)$ を用意する。点 S において x 方向の速度成分を u 、 y 方向の速度成分を v とし、 $\Delta x, \Delta y$ は十分小さい場合、 ST 間の速度ポテンシャル Φ の増加量は

$$\Delta \Phi = u \Delta x \quad (3.8)$$

となり、 SU 間の速度ポテンシャルの増加量は

$$\Delta \Phi = v \Delta y \quad (3.9)$$

となる。よって二つの式 (3.8) (3.9) の Δx と Δy を 0 を収束させると

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.10)$$

となる。

3.3 複素速度ポテンシャル

ここでは、木表現で表現された流れを二次元渦無し流れ (ポテンシャル流れ) を、複素速度ポテンシャルで作図する。渦無し流れとは、流れ場のどこをとっても渦度がゼロである流れのことで、二次元渦無し流れには速度ポテンシャルと流れ関数が存在する。これらの間には 3.1.1 節の (3.6) と 3.1.2 節の (3.13) の式より次の関係式が成り立つ。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.11)$$

複素座標 $z = x + i * y$ で定義された関数で、実数部分が速度ポテンシャル $\Phi(x, y)$ で複素数部分が流れ関数 $\psi(x, y)$ となるような複素関数を

$$f(z) = \Phi + i * \psi \quad z = x + i * y \quad (3.12)$$

とする.これを複素速度ポテンシャルと呼ぶ.本研究ではこの式を使用し, 流れの木表現を関数に変換していく.また, 複素速度ポテンシャル f に対して z に関する微分を行うと

$$\frac{df}{dz} = -u + i*v \quad (3.13)$$

となり, 実数部分が x 方向の流速成分 $-u$, 虚数部分が y 方向の流速成分 v となる.

3.2 matlab の使用

matlab とは, 関数やデータの可視化が可能な数値解析ソフトウェア, またはその中で使うプログラム言語の総称である.今回は, この matlab に関数を可視化させ, 作った関数が正しく流れを表現できているかを確認する.

4 木表現から関数への変換

本章では, 関連研究で示した流れの木表現の初期パターンを複素速度ポテンシャルで表現し, 描画が可能となるようにする.

4.1 初期パターンを複素速度ポテンシャルで表現

関連研究で示した流れの木表現の初期パターンを複素速度ポテンシャルで表現する.初期パターンの A 系は図 4.1 のように主に一様流と渦の組み合わせで表現できる.

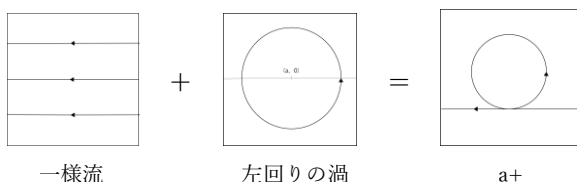


図 4.1 A 系の a+

一様流は複素速度ポテンシャルで Uz と表現出来, 左回りの渦は $-imlog(z)$, 右回りの渦は $imlog(z)$ と表現することが出来る.よって, $a+$ と $a-$ をそれぞれ $Uz - imlog(z)$ と $Uz + imlog(z)$ とすることが出来る.また, $log(z-a)$ とすることで渦の中心点を a 移動させることが出来る.A 系の $a2$ は穴の半径 a_{cm} で中心点 $(0,0)$ の円とするという条件のもと $imlog(z-a) + imlog(z+a)$ となる.

次に B 系は $b++$ と $b--$ をそれぞれ $-imlog(z+a) - imlog(z-a)$ と $imlog(z+a) + imlog(z-a)$ で表現し, $b++$ は $a < b$ としたとき $imlog(z+a) - imlog(z+b)$ となり, $b--$ は $a > b$ のとき $imlog(z+a) - imlog(z+a)$ となる.また, $\beta+$ と $\beta-$ は, 穴を半径 a_{cm} で中心点 $(0,0)$ の円とするという条件のもと $-imlog(z)$ と $imlog(z)$ と表現する.

最後に C 系は $C+$ と $C-$ は穴を半径 a_{cm} で中心点 $(0,0)$ の円とし, $-1/2a < c$ とするとき $-imlog(z \pm c)$

と $imlog(z \pm c)$ とする.

4.2 初期パターンの組み合わせの可視化

初期パターンを組み合わせたものを 4.1 で示した関数で表現する.例として $b\Phi + (b++\{b++\{1,1\}, c-(1,1)\}, c-(1,1))$ を複素速度ポテンシャルを使用した関数で表現すると以下のように表現することが出来る.

$$f(z) = -7/5 i \log(z) - 1/2 i \log(z-1.5) - 1/2 i \log(z+1.5) + i \log(z-2) + i \log(z-1) + 1/3 i \log(z-1.8) + 1/2 i \log(z+1.2) \quad (4.1)$$

(4.1)を利用して描画することが可能で描画したものは次のようになる.

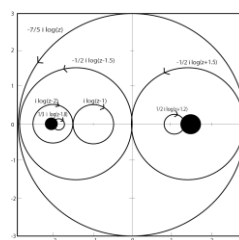


図 4.2 初期パターンの組み合わせの可視化

4.2 流れの変換規則

円板上での構造安定で非圧縮な流れの変換規則を木文法によって定める.ここでは淀み点の個数が保存されるようなトポロジ的な変化のみを考えているので, 淀み点同士がくっついたり分裂したりして淀み点の数が増減する場合は考えない.しかし一般に, 閉円板上の非圧縮流の遷移は, 淀み点同士がくっつくこと, または異なる2つの淀み点を繋ぐ軌道がくっつくことにより起こる.そのため, ある構造安定な流れを構造安定でない流れに変化した後, 他の構造安定な流れにしなければならない.流れの変換規則は図 4.3~4.7 が挙げられる.

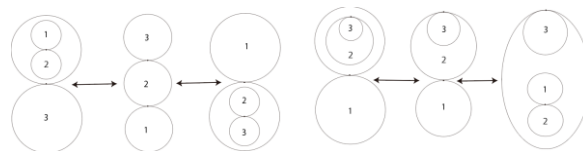


図 4.3

図 4.4

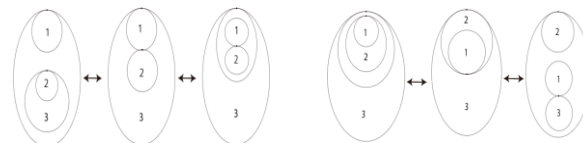


図 4.5

図 4.6

5 まとめ

木表現の初期パターンを複素速度ポテンシャルで表現した。また、生成規則をもとに複数の流れの組み合わせを複素速度ポテンシャルで表現し、それをもとに可視化することが出来た。

6 参考文献

- [1]加藤舞内, 藤綾香: 多重連結領域上の安定非圧縮流の解析, 南山大学 2018 年度卒業論文(2019).
- [2]横山哲郎, 横山知郎: ハミルトン局面流に対応する流れの向きを考慮した極大語の列挙アルゴリズム, Vol.J101-D, pp.1220-1222(2018).
- [3]荒井迅: トポロジカルな流れ構造の理解に向けて, 日本流体力学会誌, Vol.33, pp.23-28(2014).
- [4]坂上貴之, 横山知郎, 沢村陽一: 二次元多重領域内における構造安定な非圧縮流れの文字表現アルゴリズム, 数理解析研究所講究録, Vol.1900, pp.11-25(2014).
- [5] 横山哲郎, 横山知郎: 多重連結領域上の非圧縮流を表す木文法の深化, プレプリント(2018).