卒　業　論　文

ハミルトニアンを利用した二次元多重領域上の安定非圧縮流の可視化

2015SE055　永田 翔也
2016SE006　江崎 昴
2016SE031　加藤 晴海

指導教員　横山 哲郎

20yy 年 mm 月

南山大学 理工学部 ソフトウェア工学科

Title Foo and Bar

2015SE055　NAGATA Syoya
2016SE006　ESAKI Subaru
2016SE031　KATO Harumi

Supervisor　YOKOYAMA Tetsuo

Month 20yy

Department of Software Engineering
Faculty of Science and Engineering
Nanzan University

要約

ここに本論文の要約を書く。要約は論文のエッセンスを抜き出したものであるので、ここで取り扱う問題、その問題を解決するための手法、および主な成果が書かれていなければならない。要約を読むだけで、論文の概要が分かり、読者にとって興味を抱く内容か否かが分かるようになっている必要がある。

日本語と英語の両言語で要約を書くが、必ずしも 1 対 1 に対応する文章になっている必要はない。それぞれにふさわしい表現があるからである。

Abstract

In this part, the abstract of this paper is described. Since ‘abstract’ means the essence or summary of the paper, the abstract should include the description on the problems treated in the paper, the author’s approach for solving those problems, and the main results. Readers will understand the outline of the paper, without reading other parts, and be able to decide whether they will have interests in the paper or not.

目次

第 1 章

はじめに

1.1 背景

1.2 アプローチ

1.3 役割分担

第 2 章

関連研究

2.1　前提条件

本研究は前提条件を多重連結領域上で非圧縮性，非粘性の性質を持つ構造安定な流れであることとし，以下に前提条件についての説明をする．1 つの障害物を持つ領域を単連結領域，複数の障害物を持つ領域のことを多重連結領域という．非圧縮性は連続体の密度が変形の前後で変化せず常に一定である性質，非粘性は力に対する抵抗のない性質である．構造安定性は小さな乱れが加わっても構造が変化しない性質で流れの研究においては流れのトポロジーが変化しないことをいう．トポロジーは形を変形させても変わらない性質のことで例を上げると浮輪とカップはトポロジー的にいえば変形すれば同じといえるが，浮輪は変形してもボールにはならない．

2.2　初期パターン

初期パターンとは，障害物，渦構造，停留点の合計 M が 0 または 1 個の構造安定な流れの初期構造となるもので M が 0 個の構造安定な流れはパターンとパターン の 2 パターン存在する．パターン I は吸い込み湧き出し対から出る 2 つの ss-δ-saddle connections を持つ．パターン II は吸い込み湧き出し対から出る 2 つの ss-δ-saddle connections に加え homoclinic saddle point を持つ．また，吸い込み湧き出し対を持たない流れの他に M が 1 個の構造安定な流れパターン O が存在する．パターン O は closed orbits を持つ流れである．以上の 3 つのパターンを初期パターンとする．この初期パターンに木文法の構成要素を対応させるとパターン I を $a_\Phi, (a_2)$，パターン II を $a_\Phi(a_+), a_\Phi(a_-)$，パターン O を $b_{\Phi+}$, $b_{\Phi-}$ と表す．

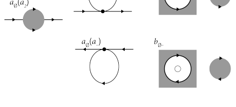

図 2.1　初期パターン

2.3　5 つの操作

構造安定な流れの流線に対して M を 1 つとそれに伴う流れの構造を追加することで新たに構造安定な流れを維持しながらこれらを可能にする操作は A0，A2，B0，B2，C の 5 つのみとされている．木文法では A0 を a_+, a_-，$A2$ を a_2，B0 を $b_{++}, b_{--}, b_{+-}, b_-c_+$，B2 を β$_+c_+$，β$_-c_-$，C を c_+, c_- と表す．

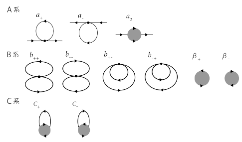

図 2.2　木文法の 5 つの操作に現れる流線

2.4　木文法

開始記号 S，非終端記号の集合 $N = S, A, B_+, B_-, C_+, C_-, C_+^*, C_-^*$，終端記号の集合 $F = F_\varepsilon \vee F_A \vee F_B \vee F_C \vee l,$ λ$, cons(,)$，生成規則 R である．終端記号 F は $F = F_\varepsilon\, a(), b_+(,), b_-(,), F_A = a_+(), a_-(), a2(), F_B = b_{++},, b_{+-}, (,), b_{--},, b_{-+}(,),$ β$_+$, β$_-, F_C = c_+(,), c_-(,)$ とそれぞれが初期パターン，A 系，B 系，C 系の操作によって現れる流線を表している．生成規則は以下のように記述する．

S→ $a_\Phi(A^*)|b_{\Phi\,+}(B_+, C_-^*)|b_{\Phi-}(B_-, C_+^*)$

$A \to a_+(B_+)|a_-(B_-)|a_2(C_+^*, C_-^*)$

$A \to$ λ $|A \cdot A^*$

$B_+ \to l|b_{++}B_+, B_+|b_{+-}(B_+, B_-)|$ β$_+C_+^*$

$B_- \to l|b_{--}B_-, B_-|b_{+-}(B_-, B_+)|$ β$_-C_-^*$

$C_+ \to c_+(B_+, C_-^*)$

$C_- \to c_-(B_-C_+^*)$

$C_+^* \to$ λ $|(C_+, C_+^*)$

$C_-^* \to$ λ $|(C_-, C_-^*)$

第3章

準備

3.1 準備

木で表現された流れを関数で表現するために複素速度ポテンシャルを使用し流れの定義を行う．本章では流れ関数と速度ポテンシャルを足した複素数ポテンシャルがどのようなものか解説を行う．また，複素速度ポテンシャルで定義した関数を可視化する方法として，描画ソフト MATLAB を利用する．

3.2 流れ関数

流れ関数とは，ある流線を基準とし，他の流線の流量を尺度（スケール）とする関数である．図 3.1 のような 2 次元多重連結領域上の非圧縮流について考える．2 つの基準となる流線を s1，s2 とし，この 2 つの流線の間を e〜e ’ や f〜 f ’ のような任意の断面積を通過する流量は常に等しくなる．

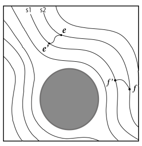

図 3.1　流れの場の全体図

このことを利用して流れ関数を定義することが可能である．流れ関数ψは，2 次元座標平面上の流線を表すことが可能であり次のように表すことが出来る．

$$\psi = \psi\ (x,\ y) \tag{3.1}$$

3.3 速度ポテンシャル

速度ポテンシャルとは，流体力学において渦無し流れを解析する場合に用いられる．渦無し流れとは流れのいたるところで渦度がゼロである流れのことであり，流れの中の渦の存在を調べる際に使用する概念を循環という．循環は，流れ場の閉曲線に沿う速度の線積分である．速度成分を u，v として，循環を次に定義する．

$$\Phi\ (S) = \int\ (V \cdot ds) = \int\ (udx + vdy) \tag{3.2}$$

この関数を速度ポテンシャルと呼ぶ.

3.4　複素速度ポテンシャル

ここでは，2 次元渦無し流れ（ポテンシャル流れ）を，複素速度ポテンシャルで作図する．渦無し流れとは，流れ場のどこをとっても渦度がゼロである流れのことで，2 次元渦無し流れには速度ポテンシャルと流れ関数が存在する．これらの間には次の関係式が成り立つ．複素座標 $z = x + iy$ で定義された関数で，実数部分が速度ポテンシャル $\Phi\ (x, y)$ で複素数部分が流れ関数ψ (x，y) となるような複素数関数を $z = x + iy$ のとき

$$f(z) = \Phi + i\ \psi \tag{3.3}$$

とする．これを複素速度ポテンシャルと呼ぶ．本研究ではこの式を使用し，流れの木表現を関数に変換していく．

3.5　MATLAB の使用

MATLAB とは，関数やデータの可視化が可能な数値解析ソフトウェア，またはその中で使うプログラム言語の総称である．今回は，この MATLAB に複素速度ポテンシャル関数を打ち込み描画させ，作った関数が正しく流れを表現できているかを確認する．

第 4 章

流れの可視化

本章では，流れの木表現を関数に変換する方法を考える．木表現を関数に変換する際，関連研究で示した流れの初期パターンに 5 つの操作を加えた流線を関数化させる．

4.1　木表現の列挙

2.4 節の生成規則に従い木の葉になり得る B 系から開始記号までを再帰的に列挙を行う．B 系には全く同じ構造の木表現の場合の重複に加え，生成規則の波括弧を用いた流れ構造の要素は反転しても円順序が流線図において一致するものは同一視することができるため，同一視順序対であるものの重複とは異なる重複も存在する. つまり，要素の順を考慮しない B 系の流れ $b_{++}b_{++}l, l, l$ と $b_{++}l, b_{++}l, l$ は重複しているとみなされる．この木表現の重複は流れの可視化する場合に同じ構造を持つ流線図を描画してしまう原因となる．

4.2　木文法の 5 つの操作に現れる流線の関数化

関連研究で示した木文法の 5 つの操作に現れる流線を複素速度ポテンシャルで表現する．A 系の a_+ と a_- は図 4.1 のように一様流と渦の組み合わせで表現できる．一様流は複素速度ポテンシャルで Uz と表現でき，左回りの渦は $-im \log z$，右回りの渦は $im \log z$ と表現することが出来る．よって，a_+ と a_- をそれぞれ $Uz - im \log z$ と $Uz + im \log z$ とすることが出来る．また，$\log z - a$ とすることで渦の中心点を acm 移動させることが可能である．A 系の a2 は障害物の半径 acm で中心点 (0, 0) の円とするという条件のもと $Uz + im \log z$ となる．

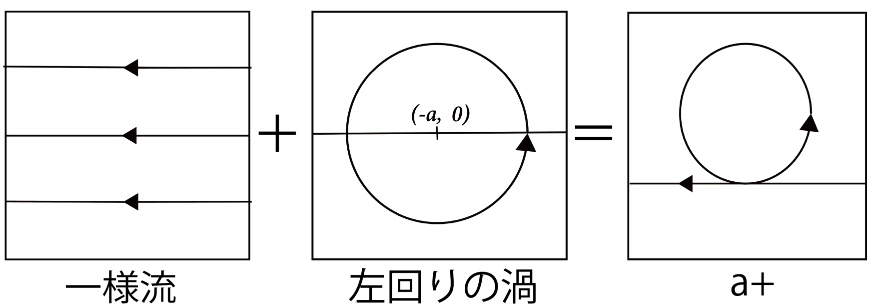

図 4.1　A 系の a+

次に B 系は図 4.2 のように 2 つの渦を組み合わせることで表現することが出来る．よって，b_{++} と b_{--} をそれぞれ $-im\log z + a - m\log z - a$ と $im\log z + a + m\log z - a$ で表現し，b_{+-} は a¡b としたとき $im\log z + a - in\log z + b$ となり，b_{-+} は a¿b のとき $im\log z + a - in\log z + a$ となる．β$_+$ と β$_-$ は障害物を半径 acm で中心点 (0, 0) の円とするという条件のもと $-im\log z$ と $im\log z$ と表現する．

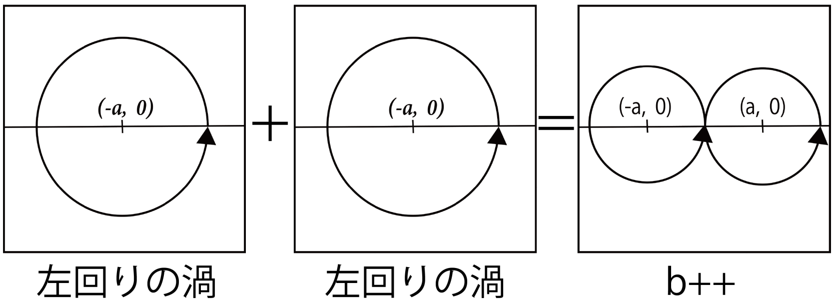

図 4.2　B 系の b++

C 系の流れは図 4.3 のように必ず渦が障害物に上にある必要がある．C 系は C_+ と C_- は障害物を半径 acm で中心点 (0, 0) の円とし，$-im\log z \pm c$ と $im\log z \pm c$ とする．しかし，これらの表現のみだと渦が多き過ぎて障害物上に渦がかからない場合やその逆が起こる問題点がある．

4.3　流れの可視化

木で表現された流線を関数に変換する．例として $b_{\Phi\ +}, b_{++}b_{++}l, l, c_-(l,l), c_-(l,l))$ を複素速度ポテンシャル関数で表現する場合を考える．4.1 節で定義した関数に数値を代入したものを MATLAB で描画させ，例とした木の流れをうまく表現できる適した大きさの描画ができる数値を見つける．そして，例とした木を表現できる式は次のようになる．

$$f(z) = -\frac{7}{5}i\log(z) - \frac{1}{2}i\log(z-1.5) - \frac{1}{2}i\log(z+1.5) + i\log(z-2) + i\log(z-1) + \frac{1}{2}i\log(z-1.8)i\log(z+1.2) \tag{4.1}$$

式 (4) を MATLAB に打ち込み描画しようと試みたがうまくいかなかった．しかし式を一項ごと打ち込むことで描画することは出来た．

4.4　流れの遷移

閉円板上での構造安定で非圧縮な流れの変換規則を木文法によって定める．ここでは淀み点の個数が保存されるようなトポロジー的な変化のみを考えているので，淀み点同士がくっついたり分裂したりして淀み点の数が増減する場合は考えない．しかし一般に，閉円板上の非圧縮流の遷移は，淀み点同士がくっつくこと，または異なる 2 つの淀み点を繋ぐ軌道がくっつくことにより起こる．そのため，ある構造安定な流れを構造安定でない流れに変化した後，他の構造安定な流れにしなければならない．流れの変換規則は図 4.3 4.6 が挙げられる．

これらの変換規則を使い，ノードを流線図，エッジを変換とした流れの遷移グラフを作成する．ある閉円板上の流線図図 4.7 を図 4.3 の変換規則を使い，流れを遷移させると

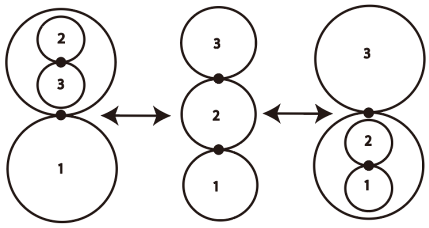

図 4.3　変換規則 1

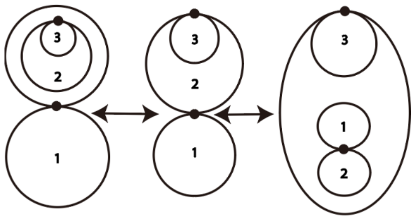

図 4.4　変換規則 2

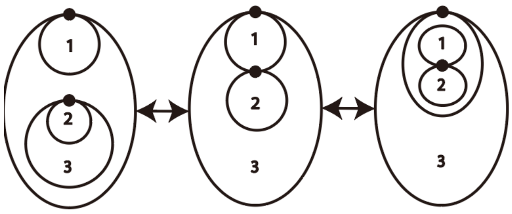

図 4.5　変換規則 3

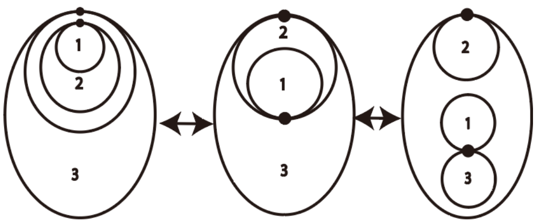

図 4.6　変換規則 4

4.8 のような遷移グラフになる．トポロジー的な変化のみを考えるため，構造が同じになるものは除く．

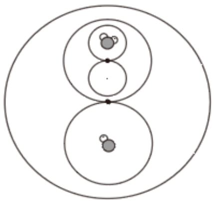

図 4.7　ある閉円板上の流線図

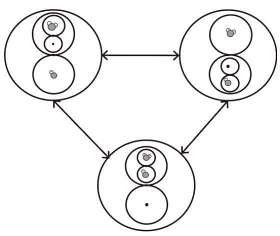

図 4.8　流れの遷移グラフ

第 5 章

おわりに

流れの可視化するための手法として木表現を関数化させ，その関数を描画ソフトに書きこむことで可視化させる方法を考えた．木表現を関数化させる方法として木表現の 5 つの操作に現れる流線をすべて関数で定義し，その組み合わせによって複雑な流れも関数で表現できるようにした．可視化の手法として MATLAB という描画ソフトを利用した．上手く流れを表現できるよう手作業で適切な数値を関数に代入し．流れに対応する式を作成した．流れの変換規則を木文法によって定義し，流れの遷移グラフを作成したことによりある流れの遷移を可視化することができた．

謝辞

本研究を進めるにあたり、筆者は何もしてこず、ひとえに周囲の皆様の手とり足とりのご指導によるもので、関係諸氏に深く感謝します。

参考文献

[1] Sakajo, T. and Yokoyama, T: Transitions between streamline topologies of structurally stable Hamiltonian flows in multiply connected domains Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol.307, pp.2241 (2015).

[2] 加藤舞，内藤綾香：多重連結領域上の安定非圧縮流の解析．南山大学 2018 年度卒業論文 (2019).

[3] 坂上貴之，横山知郎，澤村陽一: 二次元多重領域内における構造安定な非圧縮流れの文字表現アルゴリズム. 数理解析研究所講究録，Vol.1900，pp.1125(2014).

[4] 内藤綾香，加藤舞，横山哲郎ほか: 円板上の非圧縮流の反転の解析. 情報処理学会 第81 回全国大会講演論文集，pp.319320(2019).

[5] 横山哲郎，横山知郎: ハミルトン曲面流に対応する流れの向きを考慮した極大語の列挙アルゴリズム. 電子情報通信学会論文誌 D, Vol.J101-D, No.8, pp.12201222(2018).