

# ユーザーガイド：2次元有限型流れのCOT表現とリンク構造

横山 知郎

ABSTRACT. COT 表現とリンク構造という有限構造によって、穴の空いた平面上の一般的の流れのトポロジーが完全に記述される。そこで、この解説では、COT 表現とリンク構造の求め方を解説する。特に、有限型曲面流は「自明なフローボックス」「横断円環」「周期円環」を貼り合わせることで構成できる。貼り合わせ部分  $Bd(v)$  は軌道の有限和集合である。そのため、この  $Bd(v)$  の情報を抽出できれば、その補集合の各連結成分が「自明なフローボックス」か「横断円環」か「周期円環」であるかという情報から、流れが復元できる。また、勾配的な曲面流に対して、この貼り合わせの組み合わせ構造はリンク構造として表される。ハミルトン曲面流に対して、この貼り合わせの組み合わせ構造は COT 構造として表される。一般の場合は、COT 表現とリンク構造で、貼り合わせの組み合わせ構造が表現される。

## 1. イントロダクション

本解説は、坂上貴之氏との共著論文 [4] の日本語の解説である。特に、「流れの COT 表現とリンク構造とは何か」ということを大雑把に理解することを目指している。そのため、詳しい証明や定義の詳細は原論文を参考にされたい。

想定している読者は、(2次元または3次元空間上の)一般の流れの解析を目的とする人々である。そのため、実現象への応用に使えるように、力学系に詳しくない理工系の研究者などにもわかるように配慮をしている。

大雑把述べると、この解説で説明したいことは、有限型曲面流という一般の曲面上の流れを一意に表現する方法である。特に、COT 表現とは、流れの階層的な構造の情報を表現するものである。リンク構造とは、流れの構成要素の横断的な配置構造を記述したものである。また、リンク構造は縁点 (border point) 集合  $Bd(v)$  という流れの貼り付け部分で、グラフ構造になっていない部分を潰し、潰したことによって滑らかでなくなった部分を膨らませることで平滑化して得られるグラフ構造である。そのため、貼り合わせ部分である縁点集合  $Bd(v)$  の情報を抜き出すことができれば、(貼り合わせ部分の補集合がどのような形であるかの情報を抜き出すことは難しくないので、) 流れのトポロジーを抜粋することができる。

一般の勾配曲面流や非圧縮曲面流 (特に、ハミルトン曲面流) は有限型曲面流である。また、いくつかの例によって、3次元空間上の流れの射影や、対称性や一様性による縮約によって得られる曲面流は、勾配的でも非圧縮でもない有限型曲面流になることが観測されてきた。

Conley 理論は、流れが「勾配成分」と「再帰的成分」に分解できることを主張している。この主張を曲面流の場合に対して精密化することにより、以下が成立する。

有限型曲面流は、本質的に「性質の良い勾配成分」と「性質の良いハミルトン成分」に分解できる

より正確には、分解を得るためには、「空間を分断し、その境界を潰し、縮約しすぎた部分を膨らませる」必要がある。

## 2. 準備

2.1. 位相とグラフと曲面に対する記号。  $\bar{A}$  は部分集合  $A$  の閉包を表す。部分集合  $S$  の境界を  $\partial S$  と書く。曲面  $S$  の (多様体としての) 境界も  $\partial S$  と書く。  $\text{int}S := S - \partial S$  を  $S$  の内部と呼ぶ。位相空間の部分集合の境界と多様体の境界は異なる概念であることを注意しておく。

2.2. 曲面。この解説では、曲面とは球面に含まれる2次元コンパクト曲面のこととする。大雑把に言えば、曲面とは、端のついた有界な面のことである。

2.3. 曲面流, 軌道。曲面  $S$  上の流れ  $v$  とは、  $v: \mathbb{R} \times S \rightarrow S$  なる曲面  $S$  上の連続な  $\mathbb{R}$ -作用とする。この流れ  $v$  を用いて、  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $S$  上の写像  $v_t: S \rightarrow S$  を  $v_t := v(t, \cdot)$  のように定義する。いま、  $S$  上の点  $x$  に対して、

$$O(x) = \{v_t(x) \in S \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と書いて  $x$  を通る軌道と呼ぶ。大雑把に言えば、流れとは、川の流れや空気の流れなどを抽象化した概念である。

記号

以下、  $S$  を曲面、  $v$  を  $S$  上の流れとする。

2.4. 軌道の種類. 軌道が特異軌道または特異点であるとは, 軌道が一点である. 軌道が周期軌道であるとは, 軌道が円周  $S^1$  と同相であることである. 軌道が閉軌道であるとは, 特異点か周期軌道であることである. 軌道が固有 (proper) であるとは, 軌道が埋め込みになっていることである. 全ての特異点の和集合を  $\text{Sing}(v)$ , 全ての周期軌道の和集合を  $\text{Per}(v)$ , 全ての閉軌道の和集合を  $\text{Cl}(v)$ , 全ての閉でない固有軌道の和集合を  $\text{P}(v)$  と表す. Maier によって, 以下の事実が示されている [3].

**Lemma 2.1.** (球面に含まれる) 曲面  $S$  上の流れ  $v$  の軌道は固有である. すなわち, 以下が成立する:

$$S = \text{Sing}(v) \sqcup \text{Per}(v) \sqcup \text{P}(v)$$

ただし,  $\sqcup$  は非交差和を表す.

2.5.  $\alpha$ -極限集合,  $\omega$ -極限集合. 点  $x \in S$  に対して,  $\alpha$ -極限集合  $\alpha(x)$ ,  $\omega$ -極限集合  $\omega(x)$  を以下で定義する:

$$\alpha(x) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{v_t(x) \mid t > s\}}$$

$$\omega(x) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{v_t(x) \mid t < s\}}$$

大雑把に言えば,  $\alpha(x)$  は  $O(x)$  が負の方向に巻きつく極限であり,  $\omega(x)$  は  $O(x)$  が正の方向に巻きつく極限である.

2.6. 特異点の種類. 非退化な特異点は, 以下のいずれかであることが知られている (図 1 参照):

- center (渦心点, または, センター)
- saddle (鞍点, または, 鞍点)
- $\partial$ -saddle (境界鞍点, または, 境界鞍点)
- source (湧き出し)
- $\partial$ -source (境界湧き出し)
- sink (吸い込み)
- $\partial$ -sink (境界吸い込み)

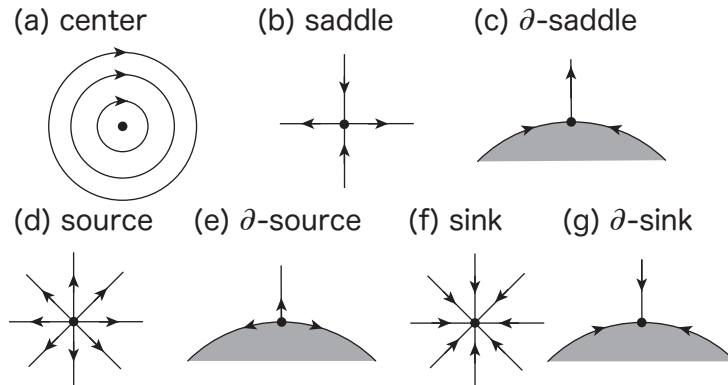


図 1. 非退化な特異点: (a) center(渦心点), (b) saddle(鞍点), (c)  $\partial$ -saddle(境界鞍点), (d) source(湧き出し点), (e)  $\partial$ -source(境界湧き出し点), (f) sink(吸い込み点), (g)  $\partial$ -sink(境界吸い込み点).

ここで,  $C^2$  ベクトル場から定まる流れの特異点为非退化とは, Hesse 行列の行列式が 0 でないことである. また,  $C^2$  ベクトル場の生成する流れのなす空間では, この非退化条件は“一般的”であることが知られている. さらに, “多くの場合には”, 境界湧き出しと境界吸い込みは, 湧き出しと吸い込みによって近似されることが知られている. そこで, 以下, この解説では, 以下を仮定する:

特異点の仮定

任意の特異点は, 以下のいずれかである: センター, 鞍点, 境界鞍点, 湧き出し, 吸い込み

2.7. 極限サーキット. 軌道の有限集合が非自明なサーキットとは, 円周  $S^1$  の埋め込みであることである. 非自明なサーキット  $\gamma$  が極限サーキットとは,  $\gamma$  に含まれない点  $x$  の  $\alpha$ -極限集合または  $\omega$ -極限集合のことである (図 2 参照).

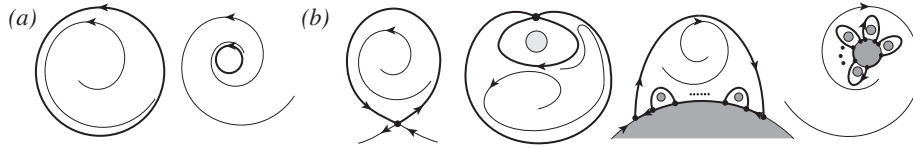


図 2. 極限サーキットの例.

極限サーキットであるような周期軌道を極限サイクルと呼ぶ. Poincaré-Bendixson 定理から以下の事実が従う.

**Lemma 2.2.** 曲面  $S$  上の流れ  $v$  の閉でない軌道の  $\alpha$ -極限集合は, 以下のいずれかである:

1. 特異点
2. 反発的な極限サーキット

**Lemma 2.3.** 曲面  $S$  上の流れ  $v$  の閉でない軌道の  $\omega$ -極限集合は, 以下のいずれかである:

1. 特異点
2. 吸引的な極限サーキット

2.8. セパトトリクス.  $\alpha$ -極限集合または  $\omega$ -極限集合が特異点であるような非特異な軌道をセパトトリクス (セパトトリクス) と呼ぶ.  $\alpha$ -極限集合または  $\omega$ -極限集合が鞍点か境界鞍点であるようなセパトトリクスを準鞍点セパトトリクスと呼ぶ.  $\alpha$ -極限集合と  $\omega$ -極限集合が鞍点または境界鞍点となるようなセパトトリクスを鞍点セパトトリクスと呼ぶ. 鞍点セパトトリクスが自己連結であるとは, 同じ鞍点を繋ぐか, 同じ境界上の境界鞍点を繋ぐことである (図 3 参照).

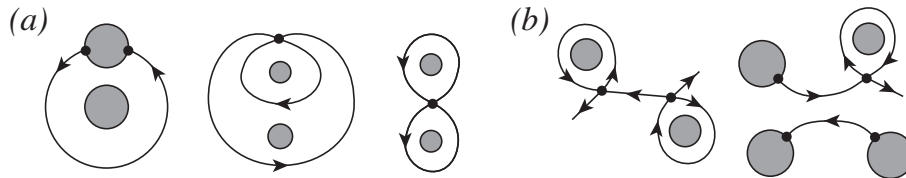


図 3. 鞍点セパトトリクス: (a) 自己連結セパトトリクス. (b) 非自己連結セパトトリクス

2.9. 有限型の流れ. 曲面上  $S$  の流れ  $v$  が有限型であるとは, 以下の 4 条件を満たすことである:

1. 全ての軌道は固有である. (注: 球面に含まれる曲面上の流れは自動的にこの仮定を満たす).
2. 全ての特異点は, センター, 鞍点, 境界鞍点, 湧き出し, 吸い込みのいずれかである (図 1 参照).
3. 極限サーキットは有限個しかない.
4. 全ての鞍点セパトトリクスは自己連結 (図 3 参照).

この有限型という条件は, ある意味 “自然” な仮定である (詳細は [4] を参照).

**Remark 1.** より一般の曲面の場合, 自己連結の条件がない場合, 特異点が一般の *finite sectored* と呼ばれる場合などについても, この解説と同様のことが成り立つ [6].

2.10. 鞍点コネクション. 全ての鞍点と境界鞍点と鞍点セパトトリクスの和集合を鞍点図式と呼ぶ. また, 鞍点図式の連結成分を鞍点コネクションと呼ぶ. さらに, 極限サーキットを持たない有限型曲面流に対して, 全ての特異点と準鞍点セパトトリクスの和集合を ss 鞍点図式と呼び,  $D_{ss}(v)$  と書く (一般の曲面流に対する ss 鞍点図式の定義は [4] を参照).

2.11. 縁点集合. 曲面  $S$  上の有限型の流れ  $v$  に対して, 軌道の和集合  $Bd(v)$  を以下で定義する:

$$\begin{aligned} \text{Bd}(v) &:= \text{Sing}(v) \cup \partial S \cup \{ \text{極限サイクル} \} \cup \{ \text{準鞍点セパトリス} \} \\ &= \{ \text{センター, 鞍点, 境界鞍点, 吸い込み, 湧き出し} \} \cup \partial S \cup \{ \text{極限サイクル} \} \cup \{ \text{準鞍点セパトリス} \} \end{aligned}$$

この  $\text{Bd}(v)$  を縁点集合 (border point set) と呼ぶ。このとき、以下の事実が知られている [6].

**Theorem 2.4.** 有限型曲面流の縁点集合は有限個の軌道の和集合である。

さらに、以下の分解が成り立つ (図 4 参照).

**Theorem 2.5.** 曲面  $S$  上の有限型の流れ  $v$  に対して、 $\text{Bd}(v)$  の補集合の任意の連結成分は以下のどれかである:

1. 自明なフローボックス (図 4(a))
2. 横断円環 (図 4(b))
3. 周期円環 (図 4(c))

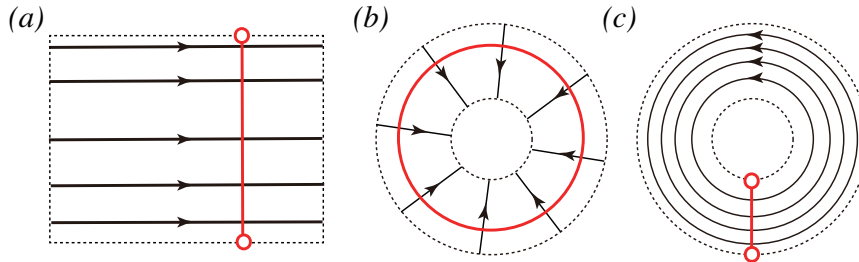


図 4. 有限型の流れ  $v$  の  $\text{Bd}(v)$  の補集合の連結成分: (a) 自明なフローボックス. (b) 横断円環. (c) 周期円環.

この定理は、曲面流に関する Conley 理論の精密化である。実際、Conley 理論は、流れが「再帰的な部分」と「勾配的な部分」に分解できるという理論であった。一方、上記の定理は有限型の曲面流に限定することで、Conley 理論を精密化している。特に、「再帰的な部分」は周期円環、「勾配的な部分」は横断円環と自明なフローボックスに対応している。

Lemma 2.2, Lemma 2.3 と上記の定理を標語的に表現すると以下になる:

有限型曲面流は「自明なフローボックス」「横断円環」「周期円環」を貼り合わせることで構成できる

「自明なフローボックス」と「横断円環」の垂直方向の境界は、湧き出しか吸い込みか極限サーキットである。

さらに、以下の節で定義される COT 表現とリンク構造というものを使って、以下の事実が成り立つ。

**Theorem 2.6.** 曲面  $S$  上の有限型の流れ  $v$  のトポロジーは、COT 表現とリンク構造によって、完全に記述される。

上記の定理を視覚的に表現すると以下になる:

$$\text{有限型曲面流のトポロジー} \xleftrightarrow{!} \text{COT 表現とリンク構造}$$

### 3. 有限型の流れの COT 表現

COT 表現 [5] とは、部分円順序表現 (partially **C**yclic **O**rdered **T**ree representation) のことであり、正規木文法 (c.f. [1]) を拡張したものになっている。

複合について

以下、複合はすべて同順とする。

3.1. 有限型の流れの COT 表現生成の根の選び方. COT 表現は根付きラベル付き木を文字列に変換したものと定める. そのため, 木の根を定める必要がある. そこで, 以下で根を定める.

1. 根となる特異点または境界を選ぶ.
2. 根が境界かつ吸い込み構造とつながる境界鞍点がある場合 ( $\beta_{\theta_2}$  の場合) は, 湧き出し構造とつながる境界鞍点をラベルづける.

3.2. 局所構造とその COT 表現の一覧. 曲面  $S$  の有限型流れが生成するすべての流線構造とそれに対応する COT 表現を以下の表 1 のように与えられる. また, 各 COT 表現に入る構造の集合のリストを表 2 で与えられる.

根構造	COT 表現	図
$\sigma_{\theta_{\pm}}$	$\sigma_{\theta_{\mp}}(\square_{b\theta_{\pm}})$	5(a)
$\sigma_{\theta_{\mp 0}}$	$\sigma_{\theta_{\mp 0}}(b_{\mp}(\square_{\mp}, \{\square_{a_{\mp s}}\}))$	5(a)
$\sigma_{\theta_{\mp +}}$	$\sigma_{\theta_{\mp +}}(b_{\mp}(\square_{\mp}, \{\square_{a_{\mp s}}\}))$	5(a)
$\sigma_{\theta_{\mp -}}$	$\sigma_{\theta_{\mp -}}(b_{\mp}(\square_{\mp}, \{\square_{a_{\mp s}}\}))$	5(a)
$\beta_{\theta_{\pm}}$	$\beta_{\theta_{\mp}}(\square_{b_{\pm}}, \{\square_{c_{\mp s}}\})$	5(b)
$\beta_{\theta_2}$	$\beta_{\theta_2}(\{\square_{c+s}, \square_{\mp}, \square_{c-s}, \square_{\sim}, \square_{\gamma\theta s}\}, \square_{as})$	5(c)
2次元構造	COT 表現	図
$b_{\mp}$	$b_{\mp}(\square_{\mp}, \{\square_{a_{\mp s}}\})$	6(a)
$b_{\pm}$	$b_{\pm}(\square_{\alpha_{\pm}})$	6(b)
孤立構造	COT 表現	図
$\sigma_{\pm}$	$\sigma_{\pm}$	7(b)
$\sigma_{\mp 0}, \sigma_{\mp \mp}, \sigma_{\mp \pm}$	$\sigma_{\mp 0}, \sigma_{\mp \mp}, \sigma_{\mp \pm}$	7(b)
サイクル	COT 表現	図
$p_{\mp}$	$p_{\mp}(\square_{b_{\mp}})$	7(c)
$p_{\pm}$	$p_{\pm}(\square_{b_{\pm}})$	7(d)
サーキット	COT 表現	図
$a_{\pm}$	$a_{\pm}(\square_{b_{\pm}})$	8(a)
$q_{\pm}$	$q_{\pm}(\square_{\mp}, \square_{\sim}, \square_{as})$	8(b)
$b_{\pm\pm}$	$b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}\}$	9(a)
$b_{\pm\mp}$	$b_{\pm\mp}(\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\mp}})$	9(b)
$\beta_{\pm}$	$\beta_{\pm}\{\square_{c_{\pm s}}\}$	10(a)
$c_{\pm}$	$c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}, \square_{c_{\mp s}})$	10(b)
$c_{2\pm}$	$c_{2\pm}(\square_{c_{\mp s}}, \square_{\mp}, \square_{c_{\pm s}}, \square_{\mp}, \square_{\gamma_{\mp s}}, \square_{c_{\mp s}}, \square_{as})$	10(c)
$a_2$	$a_2(\square_{c+s}, \square_{c-s}, \square_{\gamma-s})$	11(a)
$\gamma_{\theta_{\mp}}$	$\gamma_{\theta_{\mp}}(\square_{c+s}, \square_{\mp}, \square_{c-s})$	11(b)
$\gamma_{\theta_{\sim}}$	$\gamma_{\theta_{\sim}}(\square_{c+s}, \square_{c-s}, \square_{\sim})$	11(b)
$\gamma_{\mp-}$	$\gamma_{\mp-}(\square_{c-s}, \square_{\mp}, \square_{c+s})$	11(c)
$\gamma_{\sim-}$	$\gamma_{\sim-}(\square_{c-s}, \square_{c+s}, \square_{\sim})$	11(c)
$\gamma_{\mp+}$	$\gamma_{\mp+}(\square_{c+s}, \square_{c-s}, \square_{\mp})$	11(c)
$\gamma_{\sim+}$	$\gamma_{\sim+}(\square_{c+s}, \square_{\sim}, \square_{c-s})$	11(c)
Slidable 鞍点	COT 表現	図
$a_{\mp}$	$a_{\mp}\{\square_{\mp}, \square_{\mp}\}$	12(a)
$q_{\mp}$	$q_{\mp}(\square_{\mp})$	12(b)

TABLE 1. 曲面  $S$  上の有限型流れ  $v$  を構成する構造とその COT 表現.

縁点集合  $Bd(v)$  の補集合の連結成分は以下の 3 つの可能性でつくされる

1. 自明なフローボックス (デフォルトの構造のため, COT 表現はない) (図 4(a))
2. 横断的円環 (COT 表現は  $p_{\mp}$ ) (図 4(b))
3. 周期的円環 (COT 表現は  $p_{\pm}$ ) (図 4(c))

根構造は以下の可能性でつくされる

1. センターである無限遠点 (COT 表現は  $\sigma_{\theta\pm}$ )(図 5(a)).
2. 吸い込みまたは湧き出しである無限遠点 (COT 表現は  $\sigma_{\theta\mp 0}, \sigma_{\theta\mp\pm}, \sigma_{\theta\mp\mp}$ )(図 5(a)).
3. 周期軌道からなる無限遠境界 (COT 表現は  $\beta_{\theta\pm}$ )(図 5(b)).
4. 境界鞍点と鞍点セパトリクスからなる無限遠境界 (COT 表現は  $\beta_{\theta 2}$ )(図 5(c)).

葉構造 (i.e. 終端構造) は以下の可能性でつくされる

1. センター (COT 表現は  $\sigma_{\pm}$ )(図 7(b)).
2. 吸い込みまたは湧き出し (COT 表現は  $\sigma_{\pm 0}, \sigma_{\pm\pm}, \sigma_{\pm\mp}$ )(図 7(b)).
3. 周期軌道からなる内部境界 (COT 表現は  $\beta_{\theta\pm}$ )(図 7(a)).

鞍点は4つのセパトリクスを持っているので、以下の3つの可能性でつくされる

- (S1) 1つの自己連結セパトリクス, 吸い込み構造と湧き出し構造につながるセパトリクス (COT 表現は  $a_{\pm}, q_{\pm}$ )(図 8 参照).
- (S2) 2つの自己連結セパトリクス (COT 表現は  $b_{\pm\pm}, b_{\pm\mp}$ )(図 9 参照).
- (S3) 2つの吸い込み構造または2つの湧き出し構造につながるセパトリクス (COT 表現は  $a_{\mp}, q_{\mp}$ )(図 12 参照).

境界鞍点は3つのセパトリクスを持っているので、以下の2つの可能性でつくされる

- (S4) 同じ境界成分上の境界鞍点を繋ぐ自己連結セパトリクス (COT 表現は  $c_{\pm}, c_{2\pm}$ )(図 10 参照).
- (S5) 境界上の境界鞍点と、吸い込み構造または湧き出し構造につながるセパトリクス (COT 表現は  $\gamma_{\theta\mp}, \gamma_{\pm\pm}, \gamma_{\pm\mp}$ )(図 11 参照).

3.3. COT 表現中の □(ボックス) に入る構成要素の種類の一覧. 以下は、□(ボックス) に入る構成要素の種類を全て明示したものである.

構造集合	構成する構造群	備考	
class- $b_{\theta\pm}$	□ $b_{\theta\pm}$	{ $b_{\pm}$ }	used in $\sigma_{\theta\pm}$
class- $b_{\theta\mp}$	□ $b_{\theta\mp}$	{ $b_{\mp}$ }	used in $\sigma_{\theta\mp}$
class- $b_{+}$	□ $b_{+}$	{ $b_{\mp}, b_{+}$ }	2次元軌道構造
class- $b_{-}$	□ $b_{-}$	{ $b_{\mp}, b_{-}$ }	2次元軌道構造
class- $b_{\mp}$	□ $b_{\mp}$	{ $b_{\mp}$ }	2次元軌道構造
class- $\sim +$	□ $\sim +$	{ $p_{\pm}, b_{\pm\pm}, b_{\pm\mp}, q_{\pm}, \beta_{\pm}, a_{\mp}, \sigma_{\mp}$ }	湧き出し構造
class- $\sim -$	□ $\sim -$	{ $p_{\pm}, b_{\pm\pm}, b_{\pm\mp}, q_{\pm}, \beta_{\pm}, a_{\mp}, \sigma_{\mp}$ }	吸い込み構造
class- $\alpha_{+}$	□ $\alpha_{+}$	{ $p_{\mp}, b_{++}, b_{+-}, q_{+}, \beta_{+}, \sigma_{+}$ }	used in $b_{+}$
class- $\alpha_{-}$	□ $\alpha_{-}$	{ $p_{\mp}, b_{-+}, b_{--}, q_{-}, \beta_{-}, \sigma_{-}$ }	used in $b_{-}$
class- $a$	□ $a$	{ $a_{\pm}, a_2$ }	
class- $a_{\sim}$	□ $a_{\sim}$	{ $q_{\sim}, a_{\pm}, a_2$ }	
class- $a_{\mp}$	□ $a_{\mp}$	{ $q_{\mp}, a_{\pm}, a_2$ }	
class- $c_{+}$	□ $c_{+}$	{ $c_{+}, c_{2+}$ }	
class- $c_{-}$	□ $c_{-}$	{ $c_{-}, c_{2-}$ }	
class- $\gamma_{\theta}$	□ $\gamma_{\theta}$	{ $\gamma_{\theta\pm}$ }	
class- $\gamma_{+}$	□ $\gamma_{+}$	{ $\gamma_{\mp+}$ }	
class- $\gamma_{-}$	□ $\gamma_{-}$	{ $\gamma_{\mp-}$ }	

TABLE 2. COT 表現で使われる内部に入る構造集合一覧.

3.4. COT 表現の構成要素の一覧. 以下は、全ての COT 表現の構成要素の図をまとめたものである.

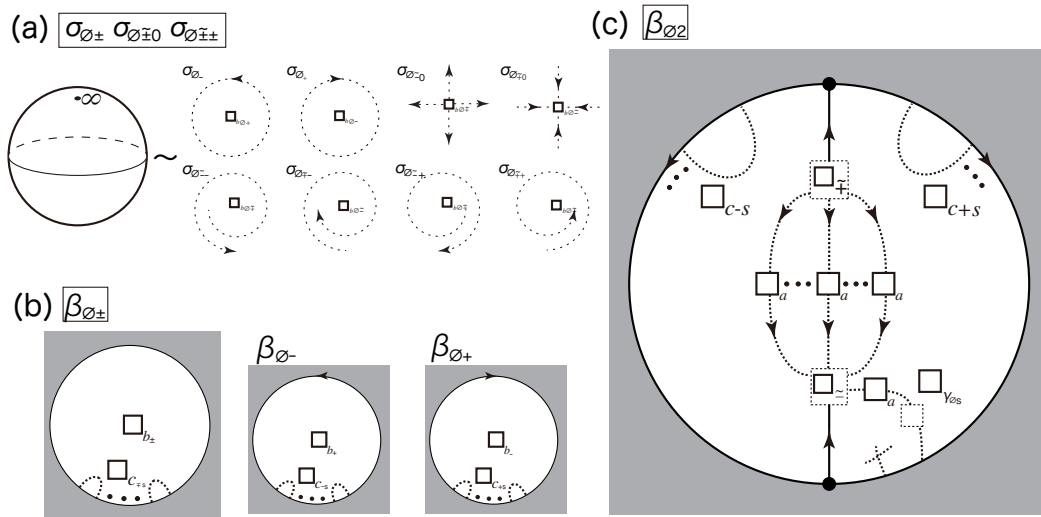


図 5. 根構造: (a) 無限遠点とその COT 記号  $\sigma_{\emptyset\mp}(b_{\pm}(\square_{\alpha\pm}))$ ,  $\sigma_{\emptyset\mp 0}(b_{\pm}(\square_{\pm}, \{\square_{a\pm s}\}))$ ,  $\sigma_{\emptyset\mp-}(b_{\pm}(\square_{\pm}, \{\square_{a\pm s}\}))$  または  $\sigma_{\emptyset\mp+}(b_{\pm}(\square_{\pm}, \{\square_{a\pm s}\}))$ . (b) 周期軌道のなす無限遠境界とその COT 記号  $\beta_{\emptyset\mp}(\square_{b_{\pm}}, \{\square_{c\mp s}\})$ . (c) 境界鞍点を持つ無限遠境界とその COT 記号  $\beta_{\emptyset 2}(\{\square_{c+s}, \square_{\mp}, \square_{c-s}, \square_{\pm}, \square_{\gamma\theta s}\}, \square_{as})$ .

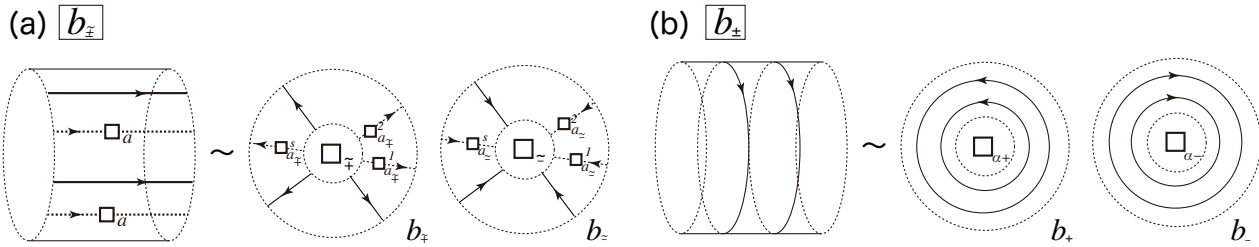


図 6. 補集合  $(\text{Bd}(v))^c$  の連結成分: (a) 横断的円環とその COT 記号  $b_{\pm}(\square_{\pm}, \{\square_{a\pm s}\})$ . (b) 周期的円環とその COT 記号  $b_{\pm}(\square_{\alpha\pm})$ .

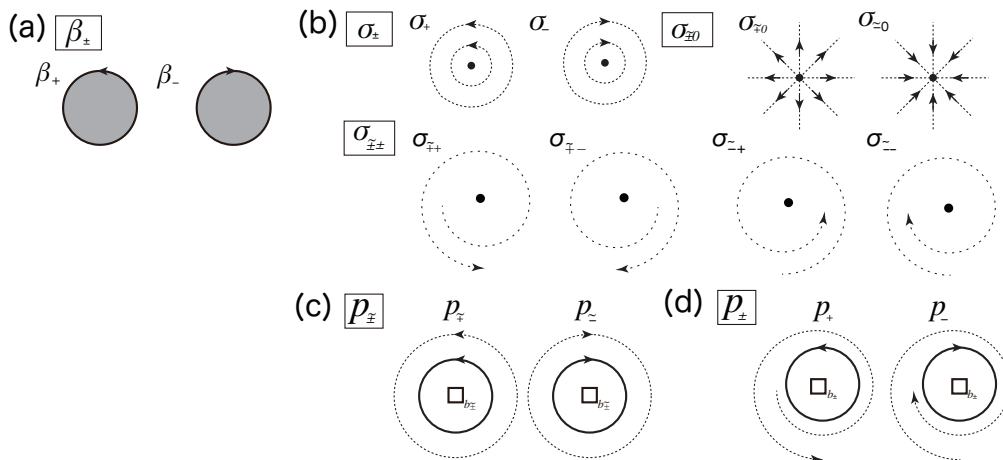


図 7. (a) 境界  $\partial S$  上の周期軌道とその COT 記号  $\beta_{\pm}(\square_{\pm})$ . (b) 特異点. 反時計回り (resp. 時計回り) のセンターとその COT 記号  $\sigma_{+}$  (resp.  $\sigma_{-}$ ). 反時計回り/時計回り/回転なしのわき出しと吸い込みとその COT 記号  $\sigma_{\mp+}$ ,  $\sigma_{\mp-}$  と  $\sigma_{\mp 0}$ . (c) 内側において, 反時計回り/時計回り/回転なしの吸引的/反発的な極限サイクルとその COT 記号  $p_{\mp}(\square_{b_{\mp}})$  (resp.  $p_{\pm}(\square_{b_{\mp}})$ ). (d) 外側において, 反時計回り/時計回り/回転なしの反発的 (resp. 吸引的) な極限サイクルとその COT 記号  $p_{+}(\square_{b_{+}})$  (resp.  $p_{-}(\square_{b_{-}})$ ). (注意: 特異点の周りの反時計回り/時計回り/回転なしという性質は, 力学系における位相同値の関係では区別されないが, 応用上重要なため, この3つの場合が存在すると仮定して, 区別している.)

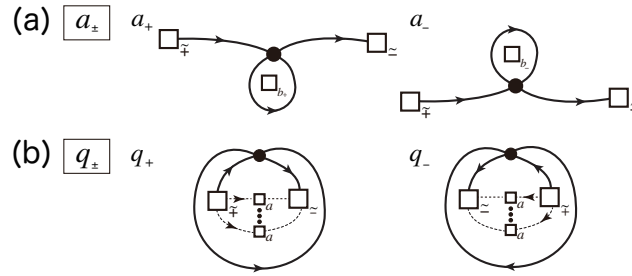


図 8. (S1)-鞍点: (a) 1つの自己連結セパトリクスとその外側に吸い込み構造と湧き出し構造につながるセパトリクスがある構造. その COT 記号は  $a_{\pm}(\square_{b_{\pm}})$ . (b) 1つの自己連結セパトリクスとその内側に吸い込み構造と湧き出し構造につながるセパトリクスがある構造. その COT 記号は  $q_{\pm}(\square_{\mp}, \square_{\pm}, \square_{as})$ .

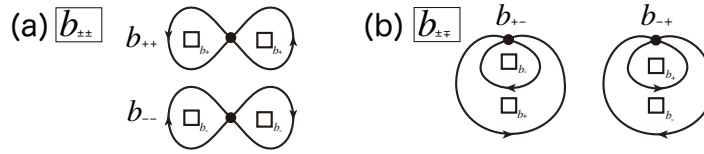


図 9. (S2)-鞍点: (a) 8の字の形の2つの自己連結セパトリクスとその COT 記号  $b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}\}$ . (b) 入れ子になっている2つの自己連結セパトリクスとその COT 記号  $b_{\pm\mp}(\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\mp}})$ .

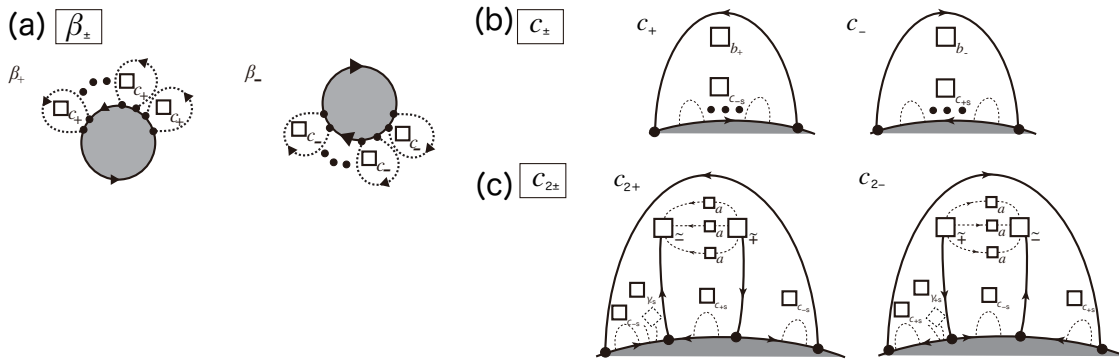


図 10. (S4)-鞍点: (a) 周期境界とその COT 記号  $\beta_{\pm}\{\square_{c_{\pm s}}\}$ . (b) 境界上の1つの自己連結セパトリクスで, それの囲む領域の一番外側の構造に湧き出しや吸い込みを含まないもの. その COT 記号は  $c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}, \square_{c_{\mp s}})$ . (c) 境界上の境界鞍点と, 吸い込み構造につながる1つのセパトリクスと, 湧き出し構造につながる1つのセパトリクス. その COT 記号は  $c_{2\pm}(\square_{c_{\mp s}}, \square_{\mp}, \square_{c_{\pm s}}, \square_{\mp}, \square_{\gamma_{\mp s}}, \square_{c_{\mp s}}, \square_{as})$ .

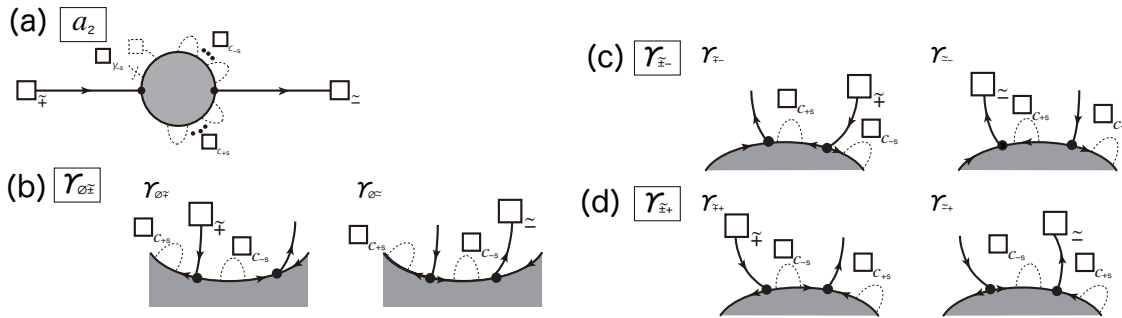


図 11. (S5)-境界鞍点: (a) 吸い込み構造につながる1つのセパトリクスと, 湧き出し構造につながる1つのセパトリクスを持つ境界. その COT 記号は  $a_2(\square_{c_{+s}}, \square_{c_{-s}}, \square_{\gamma_{-s}})$ . (b) 無限遠境界上の境界鞍点の組とその COT 記号  $\gamma_{0\mp}(\square_{c_{+s}}, \square_{\mp}, \square_{c_{-s}})$ ,  $\gamma_{0\pm}(\square_{c_{+s}}, \square_{c_{-s}}, \square_{\pm})$ . (c) 全体的に時計回りに回転している内部境界上の境界鞍点の組とその COT 記号  $\gamma_{\mp-}(\square_{c_{-s}}, \square_{\mp}, \square_{c_{+s}})$ ,  $\gamma_{\pm-}(\square_{c_{-s}}, \square_{c_{+s}}, \square_{\pm})$ . (d) 全体的に反時計回りに回転している内部境界上の境界鞍点の組とその COT 記号  $\gamma_{\mp+}(\square_{c_{+s}}, \square_{c_{-s}}, \square_{\mp})$ ,  $\gamma_{\pm+}(\square_{c_{+s}}, \square_{\pm}, \square_{c_{-s}})$ .

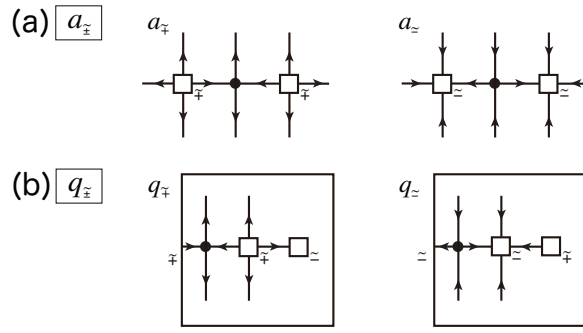


図 12. (S3)-鞍点: (a) 全体として湧き出し (resp. 吸い込み) 構造であり, 2つの吸い込み (resp. 湧き出し) 構造につながる鞍点. その COT 表現は  $a_{\pm}\{\square_{\pm}, \square_{\pm}\}$ . (b) 全体として湧き出し/吸い込み構造であり, その内部に 1つの吸い込み構造と 1つの湧き出し構造と鞍点を含む構造. その COT 表現は  $q_{\pm}(\square_{\pm})$ .

3.5. 有限型の流れの COT 表現生成のアルゴリズム. アルゴリズムは, 木を葉の方から作るアルゴリズムなので, 最内部から構造を抜く過程で, その子がなんであるかを確認しながら抜いていく. START の前に, 以下の 1,2 を行う.

1. 根となる特異点または境界を選ぶ.
2. 根が境界かつ吸い込み構造につながる境界鞍点がある場合 (i.e.  $\beta_{02}$  の場合) は, 湧き出し構造につながる境界鞍点を決める.

有限型の流れの COT 表現生成のアルゴリズムは, 図 13 に記載されているフローチャートなどを用いることができる.

#### 4. 有限型の流れのリンク構造

以下では, 有限型の流れのリンク構造について述べる.

4.1. 有限型の流れの分解定理. 有限型の流れのリンク構造を定義するために, 有限型の流れが本質的に Morse 曲面流と構造安定なハミルトン曲面流に分解できることを示す. Morse 曲面流は, Morse-Smale 曲面流と呼ばれる流れで極限サイクルを持たないものと定義される. 一方, Morse 曲面流は, 非退化な特異点しか持たない, 境界上でしか鞍点セパトリクスを持たない勾配流として特徴付けられる. また, 構造安定なハミルトン曲面流とは, 非退化な特異点しか持たない, 自己連結な鞍点セパトリクスしか持たない, ハミルトンベクトル場によって生成される曲面流のことである.

$G$  を  $\text{Bd}(v)$  に含まれる非自明なサーキットの和集合とする. すなわち以下のように定める:

$$G := \bigcup \{ \gamma \subseteq \text{Bd}(v) : \text{非自明なサーキット} \}$$

さらに, 勾配曲面流とハミルトン曲面流の間の貼り付け部分に対応する  $\Gamma$  を以下で定義する:

$$\Gamma_p := \bigcup \{ \gamma \subseteq G : \text{鞍点コネクション} \mid \gamma \subset \text{int}(\gamma \sqcup \text{Per}(v)) \}$$

$$\Gamma := G - \Gamma_p$$

$$S_0 := S - \Gamma = (S - \Gamma) \sqcup \Gamma_p$$

ここで,  $S_{\text{me}}$  を  $S_0$  の距離による完備化とする. さらに, 距離による完備化から定まる標準写像を  $\pi : S_{\text{me}} \rightarrow S$  と書く.

$$\partial := \pi^{-1}(\Gamma)$$

新しい境界  $\partial$  の各連結成分を一点に潰すことによって得られる写像を  $\varphi : S_{\text{me}} \rightarrow S_{\text{mc}}$  と書く. 曲面  $S_{\text{mc}}$  に誘導された流れを  $v_{\text{mc}}$  と書く. このとき, 勾配成分とハミルトン成分の間を繋ぐ貼り合わせ部分  $\partial$  の像  $\partial_{\text{mc}}$  を以下で定める:

$$\partial_{\text{mc}} := \varphi(\partial) = \varphi(\pi^{-1}(\Gamma)) \subseteq \text{Sing}(v_{\text{mc}})$$

例えば,  $v_{\text{mc}}$  と  $v_{\text{me}}$  は図 14 のようになっている. このとき以下の主張を得る.

**Proposition 4.1.** 曲面  $S$  上の有限型の流れ  $v$  に対して、以下の分割が成り立つ:

$$S_{\text{mc}} = S_g \sqcup S_H$$

ここで、制限  $v_{\text{mc}}|_{S_g}$  は勾配流であり、各特異点是非退化かマルチ鞍点である。さらに、制限  $v_{\text{mc}}|_{S_H}$  は構造安定なハミルトン流である。

退化している特異点を境界に置き換える操作を爆発 ('blowup') と呼ぶ。  $S_{\text{mc}}$  の爆発から定まる標準写像を  $\phi: S_{\text{mb}} \rightarrow S_{\text{mc}}$  と定める。このとき、曲面  $S_{\text{mb}}$  に誘導された流れを  $v_{\text{mb}}$  と書く。また、勾配成分とハミルトン成分の間を繋ぐ貼り合わせ部分を潰して得られた特異点の集合  $\partial_{\text{mc}}$  の中で退化している特異点を爆発して得られる  $\partial_{\text{mb}}$  を以下で定める:

$$\partial_{\text{mb}} := \phi^{-1}(\partial_{\text{mc}}) = \phi^{-1}(\varphi(\partial)) = \phi^{-1}(\varphi(\pi^{-1}(\Gamma))) \subseteq (\text{Sing}(v_{\text{mb}}) \cup \partial S_{\text{mb}}) \cap D_{\text{ss}}(v_{\text{mc}}|_{S_M})$$

このとき、以下の主張を得る。

**Theorem 4.2.**  $v$  を曲面  $S$  上の有限型の流れとする。このとき、以下の分割が成り立つ:

$$S_{\text{mb}} = S_M \sqcup S_H$$

ここで、制限  $v_{\text{mc}}|_{S_M}$  は Morse 流である。さらに、制限  $v_{\text{mc}}|_{S_H}$  は構造安定なハミルトン流である。

4.2. 有限型の流れのリンク構造. 定理 4.2 より、制限  $v_M := v_{\text{mc}}|_{S_M}$  の ss 鞍点関式を  $Lk(v_M)$  と書く。また、 $\partial_{\text{mb}} \subseteq Lk(v_M) \cap (\text{Sing}(v_{\text{mb}}) \cup \partial S_{\text{mb}})$  であったので、 $\partial_{\text{mb}}$  の各連結成分に、元の有限型曲面流  $v$  の COT 表現のどの  $\square$  (ボックス) に対応するかというラベルを付与する。このとき、ラベルが付与された ss 鞍点関式  $Lk(v_M)$  を、 $v_M$  のリンク構造と呼ぶ。

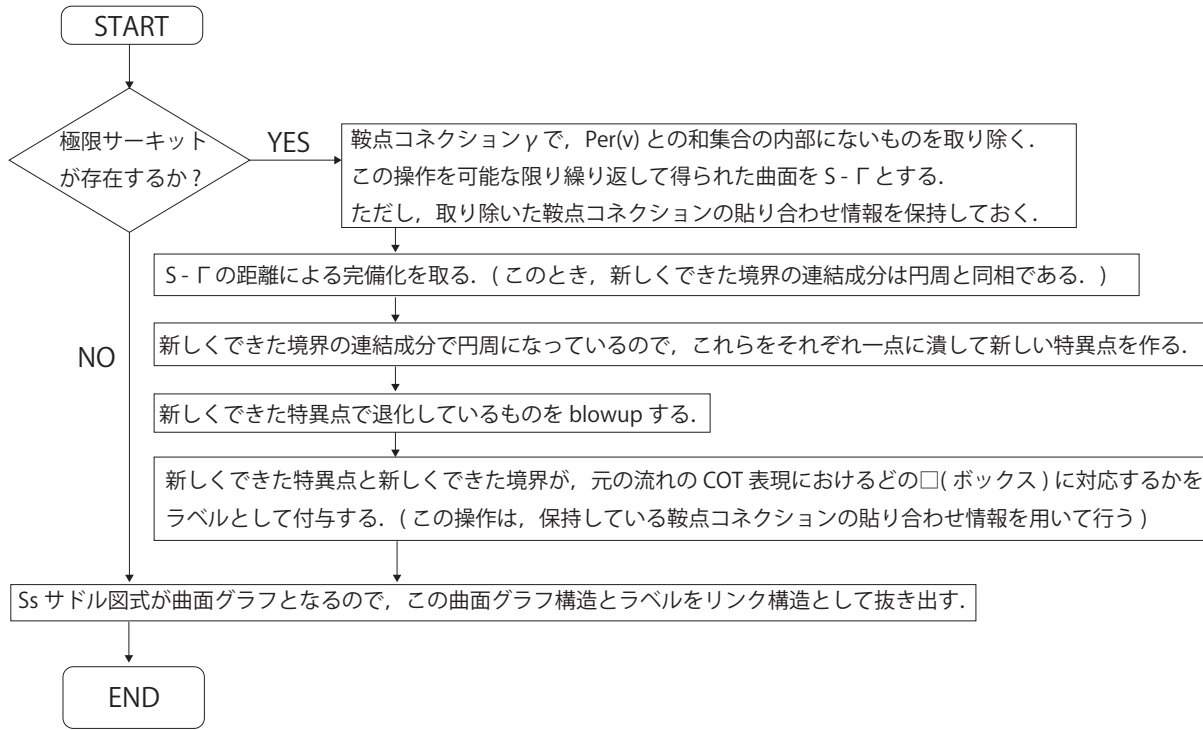


図 15. リンク構造の抜き出し方

4.3. 有限型の流れの表現定理. 以下が成立する。

**Theorem 4.3.** 有限型曲面流  $v$  のトポロジーは、リンク構造  $Lk(v_M)$  と  $v$  の COT 表現によって一意に表現される。

**Remark 2.** 人工的な構成ではあるが、同様の構成で、 $\Gamma$  をより小さく取れることもできる。

実際、

$$\Gamma_{p'} := \bigcup \{ \gamma \subseteq G : \text{セパレーター} \mid \gamma \subset \text{int}(\gamma \sqcup \text{Per}(v)) \}$$

$$\Gamma' := G - \Gamma_{p'}$$

$$S'_0 := S - \Gamma'$$

として,  $S'_0$  から *fake* 境界鞍点 (i.e. 0-境界鞍点) を取り除き, その取り除いた特異点の位置情報を付与して, 退化している特異点を爆発すれば良い.

#### REFERENCES

- [1] H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, C. Löding, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison, and M. Tommasi, *Tree automata techniques and applications*, Available on: <http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata>, 2007. release October, 12th 2007.
  - [2] Ma, Tian; Wang, Shouhong, *Geometric theory of incompressible vector fields with applications to fluid dynamics* Mathematical Surveys and Monographs, 119. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. x+234 pp. ISBN: 0-8218-3693-5.
  - [3] A. G. Maier, *Trajectories on closed orientable surfaces*, Mat. Sb. 12 (54) (1943), 71–84
  - [4] T. Sakajo, T. Yokoyama, *Discrete combinatorial representations of topological orbit structures for flows of finite type and topological flow data analysis*, submitted.
  - [5] T. Yokoyama, T. Yokoyama, *Complete Transition Diagrams of Generic Hamiltonian Flows with a Few Heteroclinic Orbits*, submitted.
  - [6] T. Yokoyama, *Decomposition of surface flows*, submitted.
- Email address:* [tomoo@kyokyo-u.ac.jp](mailto:tomoo@kyokyo-u.ac.jp)

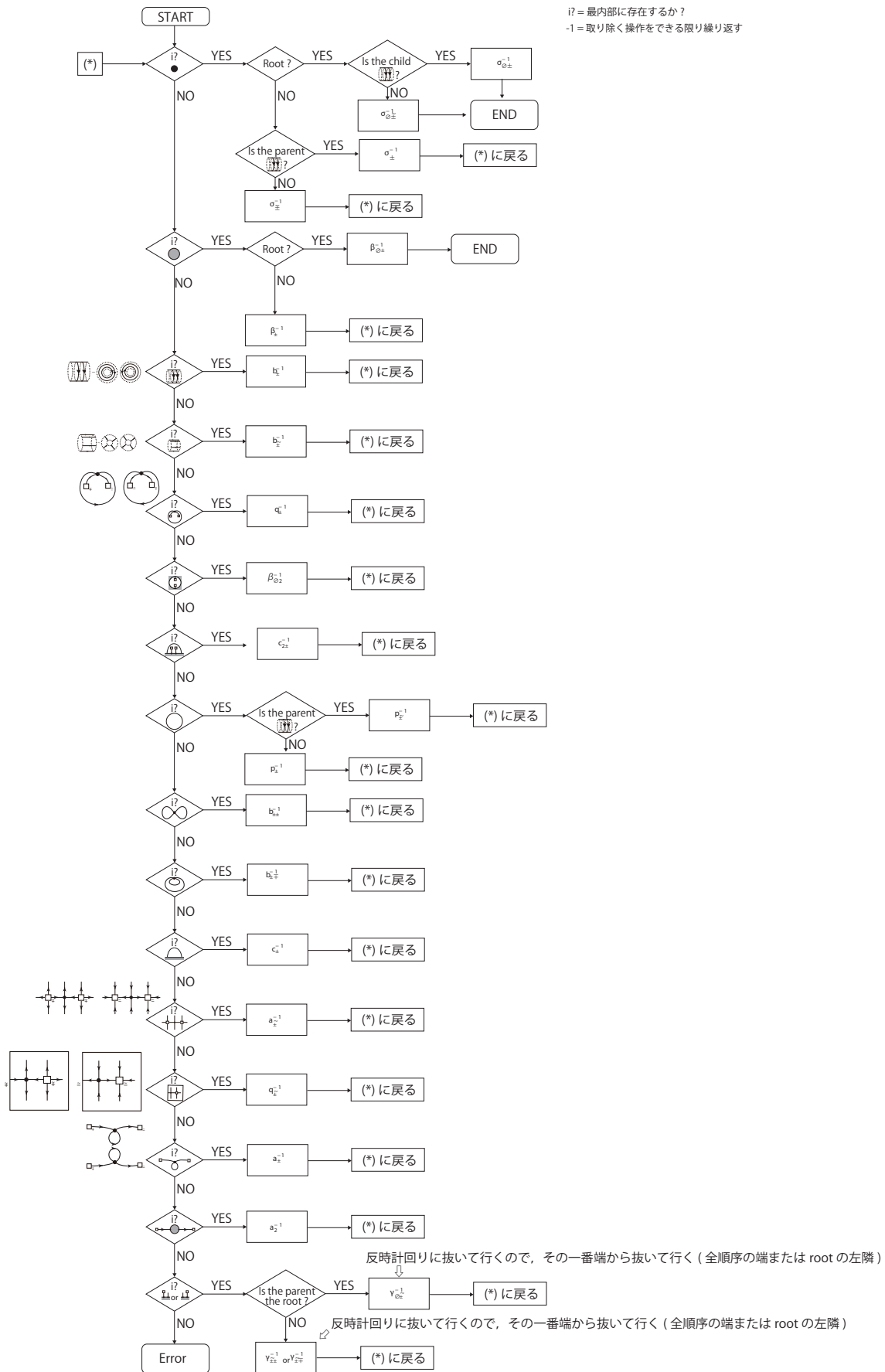


図 13

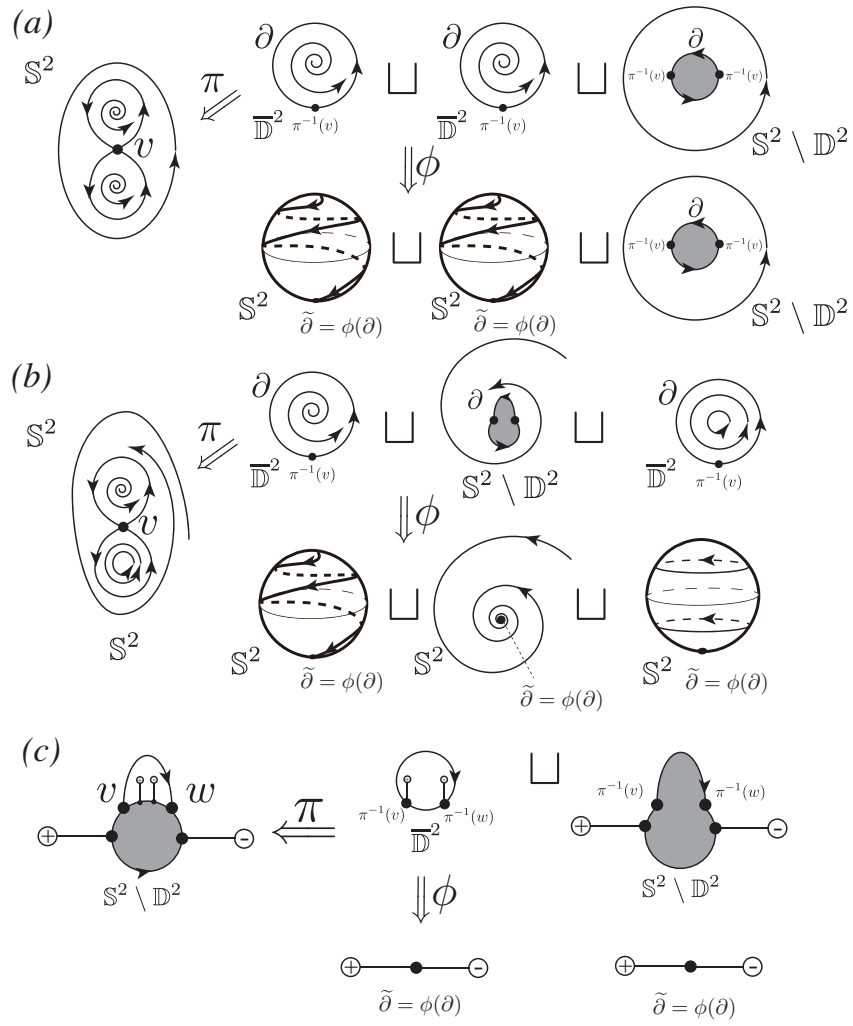


図 14.  $v_{mc}$  と  $v_{me}$  の例