補習課題（2021/04/09）

以下の問題の解答を（模範解答を見ずに）作成して下さい。手書きで構いません。
模範解答を見て〇付けをして下さい。4 月 15 日 15:00 までに合同研究室に提出して下さい。
また，写像，合成写像，単射，逆写像の定義を LaTeX で書いて印刷して提出して下さい。
これらの提出物には学生番号と氏名を忘れずに記入して下さい。

以下は 1 年生「微積分学 I および演習」のテキストからの問題です。

問 1 次の集合 A から集合 B への対応は写像かどうか調べよ（写像かどうかを述べ，理由を説明せよ）．

(1) $A=\{7, 8, 9, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$ とし，A の要素に，その数の約数である B の要素を対応させる．

(2) $A=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B=\{63, 64, 65, 66\}$ とし，A の要素に，その数の倍数である B の要素を対応させる．

(3) A を北川大学の学生の集合，B を北川大学の教員の集合とし，学生に指導教員を対応させる．

(4) A を北川大学の男子学生の集合，B を韓国の人気アイドルグループ「ヨジャチング」（愛称「ヨチン」）のメンバーの集合，すなわち，$B=\{$ イェリン，ウナ，ユジュ，シンビ，オムジ，ソウォン $\}$ とし，学生に好みのメンバーを対応させる．

問 2 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とし，写像 $f: A \to B$ を考える．このとき，写像の総数，単射の総数，単調増加な写像（$i<j \Longrightarrow f(i)<f(j)$ を満たす写像）の総数をそれぞれ求めよ．

ヒント 「数学 A」の内容を思い出そう．

問 4 関数 $f(x)=x^2-2x$ $(x \geq 1)$ を考える（$x \geq 1$ が定義域であると考える）．

(1) 関数 $f(x)$ の値域を求めよ．

(2) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(3) 任意の $x \geq 1$ について，$f^{-1}(f(x))=x$ が成り立つことを確かめよ．

ヒント **(2)** 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ （解の公式）．

問 1. **(1)** A の要素 10 に B の 2 つの要素 2, 5 が対応するので写像ではない． **(2)** $63 = 3^2 \cdot 7$, $64 = 2^6$, $65 = 5 \cdot 13$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ より，$4 \mapsto 64$, $5 \mapsto 65$, $6 \mapsto 66$, $7 \mapsto 63$, $8 \mapsto 64$, $9 \mapsto 63$ のような写像である． **(3)** 各学生には必ずただ 1 人の指導教員が決まっていれば写像である． **(4)** ヨジャチングに興味のない学生や 2 人以上のメンバーが好きという学生がいる可能性があるので写像ではない．（すべての学生に 1 人だけ好みのメンバーがいる可能性も捨て切れないので，絶対に写像ではないとは言い切れないが，常識的に考えると，違うということである．）

問 2. A の 3 つの要素 1, 2, 3 のそれぞれに 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 通りの対応のさせ方があるので，写像の総数は $6 \times 6 \times 6 = 216$ である．単射の総数は，B から 3 個の要素を選んで作る順列の数と同じで，${}_6\mathrm{P}_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ である．B から 3 個の要素を選んで，それを大きさの順に並べたものを $f(1), f(2), f(3)$ とすれば，単調増加な写像が得られる．したがって，その総数は ${}_6\mathrm{C}_3 = (6 \times 5 \times 4)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 20$ である．

問 4. **(1)** $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ より，値域は区間 $[-1, \infty)$ となる． **(2)** $x = y^2 - 2y$ とおくと，2 次方程式の解の公式により，$y = 1 \pm \sqrt{x+1}$ が得られる．もとの関数の定義域が逆関数の値域なので，$y \geq 1$ から $y = 1 + \sqrt{x+1}$ のほうを選び，$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ $(x \geq -1)$.
(3) $x \geq 1$ のとき，

$$f^{-1}(f(x)) = 1 + \sqrt{(x^2 - 2x) + 1} = 1 + \sqrt{(x-1)^2} = 1 + (x-1) = x$$

以下は，数学Ⅰの問題集からの問題です。

例題 54　必要条件・十分条件　★★☆☆☆

次の $\square$ に最も適する語句を (ア)〜(エ) から選べ。x，y は実数とする。

(1) $x<1$ は $x \leqq 1$ であるための $\square$。

(2) $x<y$ は $x^4<y^4$ であるための $\square$。

(3) $xy+1=x+y$ は x，y のうち少なくとも 1 つは 1 であるための $\square$。

(4) $\angle \mathrm{A}<90^\circ$ は，$\triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるための $\square$。

(ア) 必要十分条件である　　(イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない

(エ) 必要条件でも十分条件でもない

指針

1 まず，命題を $p \Longrightarrow q$ の形に書いて，その真偽を調べる。

2 次に，その逆 $q \Longrightarrow p$ の真偽を調べる。

3 そして，

$p \Longrightarrow q$ が **真** ならば
p は q であるための **十分条件**

$q \Longrightarrow p$ が **真** ならば
p は q であるための **必要条件**

などと答える。

(十分) $\Longrightarrow$ (必要)
矢印の向きに
じゅう (十) ⟶ よう (要)

解答

(1) $x<1 \Longrightarrow x \leqq 1$ は明らかに真。

$x \leqq 1 \Longrightarrow x<1$ は偽。　(反例)　$x=1$

よって　**(ウ)**

◀ $x<1$ は **十分条件**。
◀ $x<1$ は必要条件ではない。

(2) $x<y \Longrightarrow x^4<y^4$ は偽。　(反例)　$x=-1$，$y=0$

$x^4<y^4 \Longrightarrow x<y$ は偽。　(反例)　$x=0$，$y=-1$

ゆえに　**(エ)**

◀ $x<y$ は十分条件ではない。
◀ $x<y$ は必要条件ではない。

(3) $xy+1=x+y \Longleftrightarrow (x-1)(y-1)=0$

$\Longleftrightarrow x=1$ または $y=1$

$\Longleftrightarrow x$，y のうち少なくとも 1 つは 1

よって　**(ア)**

◀ $xy-x-y+1=0$
$\Longleftrightarrow$
$(y-1)x-(y-1)=0$

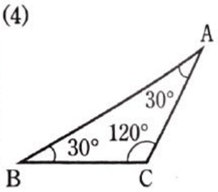
(4) $\angle \mathrm{A}<90^\circ \Longrightarrow \triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形　は偽。

(反例)　$\angle \mathrm{A}=30^\circ<90^\circ$，$\angle \mathrm{B}=30^\circ$，$\angle \mathrm{C}=120^\circ$

$\triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形 $\Longrightarrow \angle \mathrm{A}<90^\circ$　は真。

ゆえに　**(イ)**

(4)



例題 57 逆・裏・対偶 ★☆☆☆☆

a, b, x, y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

(1) 4 の倍数は 2 の倍数である。

(2) $ab=0$ ならば $a=0$ かつ $b=0$

(3) $x^2>9$ ならば $x \neq 3$

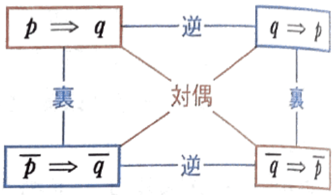
(4) $x+y \leqq 4$ ならば $x \leqq 2$ または $y \leqq 2$

指針 逆・裏・対偶を作るには，まず，与えられた命題を $p \Longrightarrow q$ の形に書く。そして

逆は $q \Longrightarrow p$，裏は $\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$，
対偶は $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$

命題の真偽は

1 真なら 証明　2 偽なら 反例



解答 (1) **逆：2 の倍数は 4 の倍数である。**

(偽) 反例は 6

裏：4 の倍数でないならば 2 の倍数でない。

(偽) 反例は 6

対偶：2 の倍数でないならば 4 の倍数でない。

2 の倍数でない数は奇数であるから **(真)**

(2) **逆：$a=0$ かつ $b=0$ ならば $ab=0$** **(真)**

裏：$ab \neq 0$ ならば $a \neq 0$ または $b \neq 0$

$ab \neq 0$ のとき，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ であるから **(真)**

対偶：$a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば $ab \neq 0$

(偽) 反例は $a=1$, $b=0$

(3) **逆：$x \neq 3$ ならば $x^2>9$** **(偽)** 反例は $x=1$

裏：$x^2 \leqq 9$ ならば $x=3$ **(偽)** 反例は $x=1$

対偶：$x=3$ ならば $x^2 \leqq 9$ **(真)**

(4) **逆：$x \leqq 2$ または $y \leqq 2$ ならば $x+y \leqq 4$**

(偽) 反例は $x=1$, $y=5$

裏：$x+y>4$ ならば $x>2$ かつ $y>2$

(偽) 反例は $x=1$, $y=5$

対偶：$x>2$ かつ $y>2$ ならば $x+y>4$

$x>2$ かつ $y>2$ のとき

$x>2$ であるから $x+y>2+y$

$y>2$ であるから $2+y>4$

よって $x+y>4$ **(真)**

◀逆と裏の真偽は一致する。

(2) 「かつ」の否定は「または」

(3) $>$ の否定は $\leqq$

(4) 「または」の否定は「かつ」

◀両辺に y を加える。

◀両辺に 2 を加える。

◀$A>B$, $B>C$ のとき $A>C$

例題 60　$\sqrt{2}$ は無理数の証明　★★★☆☆

(1) n が整数であるとき，n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明せよ。

(2) $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。　⇐例題 58，59

指針 (1) 「n^2 が偶数である」という条件を，$n^2=2k$ (k は 0 以上の整数) と表しても $n=\pm\sqrt{2k}$ となり，扱いにくい。よって，与えられた命題の **対偶** を証明する。

(2) **背理法** を利用。

$\sqrt{2}$ が無理数 **でない** (有理数である) と仮定すると，有理数は分数の形で表すことができる数で，$\sqrt{2}$ は正であるから，

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}\ (m,\ n \text{ は互いに素である自然数})$$

と表される。

実数

無理数	有理数

注意 2 つの整数 m，n が **互いに素** であるとは，m と n の最大公約数が 1 であることと同じである (数学A参照)。

解答 (1) 与えられた命題の対偶は

「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」

奇数 n は $n=2k+1$ (k は整数) と表されるから

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$$
$$=2(2k^2+2k)+1$$

ここで，$2k^2+2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である。

よって，対偶が真であるから，与えられた命題も真である。

◀命題とその対偶の真偽は一致。

(2) $\sqrt{2}$ が無理数ではない，すなわち有理数であると仮定すると　$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$　(m，n は互いに素である自然数)

と表される。

◀2 つの自然数 m，n は 1 以外の公約数をもたない。

$m=\sqrt{2}\,n$ と変形し，両辺を 2 乗すると

$$m^2=2n^2 \quad \cdots\cdots ①$$

ゆえに，m^2 は偶数であり，(1) により，m も偶数である。

したがって，$m=2k$ (k は正の整数) と書けて，① から

$$(2k)^2=2n^2$$

ゆえに　$n^2=2k^2$

よって，n^2 は偶数であり，n も偶数である。

これは m，n が互いに素であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。

◀m，n が公約数 2 をもつから，互いに素であることに矛盾する。

検討 上の例題と同様にして，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$ が無理数であることを

「n^2 が k ($k=3,\ 5,\ 7$) の倍数であれば n も k の倍数である」

ことを利用して証明することができる。$\sqrt{3}$ については，下の練習 60 参照。