2 自然意味論と構造操作的意味論

最終更新: 2020/05/19

問題 4 と 12 に解答しなさい【必須課題】. 問題 12 はできるところまでで良い. 残りの問題は必須では無い.

問題 1 (状態と代入). 次の計算状況に関する導出木を構築しなさい.

1. 計算状況 $\langle$`skip; y:=z+1`$, s[\mathtt{y} \mapsto 1][\mathtt{z} \mapsto 2]\rangle$
2. 文 $S =$ `n:=2; sum:=0; i:=1; while i <= n do (sum := sum+i; i:=i+1)` としたときの計算状況 $\langle S, [\mathtt{n} \mapsto -1, \mathtt{sum} \mapsto 15, \mathtt{i} \mapsto 15]\rangle$

問題 2 (抽象構文木, SwA p.9). 変数 `x` と `y` の初期値がそれぞれ n, m と仮定する. 変数 `z` に n^m, すなわち

$$\underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{m\text{ 回}}$$

を代入するような While 言語の文を示しなさい.

問題 3 (SwA p.25, Exercise 2.3, p.36, Exercise 2.16). 文 `z:=0; while y <= x do (z:=z+1; x:=x-y)` と `x` の値が 17 で `y` の値が 5 の状態を考える. 導出木と導出列を構築せよ.

問題 4 (SwA p.26, Exercise 2.4). 次の文を考える.

- `while not(x=1) do (y:=y*x; x:=x-1)`
- `while 1<=x do (y:=y*x; x:=x-1)`
- `while true do skip`

各文が常に停止するか, 常にループするかに答えなさい. 公理や規則を用いてなぜその答えになるか説明しなさい.
ヒント:

i)「公理や規則を用いて」と「説明しなさい.」という指示がある問題であることに注意しなさい.
ii) 1, 2, 3 の文それぞれについて常に停止するか考えなさい. 1, 2, 3 の文それぞれについて常にループするかを考えなさい.
iii) 常に停止するの否定が何かを考えなさい. 常にループするの否定が何かを考えなさい.
iv) 1 は $s\ \mathtt{x} = 1$ の場合と $s\ \mathtt{x} = 0$ の場合を考えなさい.
v)「常に停止する」を示すために「$s\ \mathtt{x} = 1$ の場合」を示すだけでは不十分である.

問題 5 (SwA p.28, Exercise 2.6). $S_1; (S_2; S_3)$ と $(S_1; S_2); S_3$ が意味論的に等価であることを示せ. また, $S_1; S_2$ と $S_2; S_1$ が一般に等価ではない文を示せ.

問題 6 (SwA p.32, Exercise 2.11, 2.12)**.** 算術式と論理式の自然意味論を示せ．定めた算術式と論理式の意味論が $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とそれぞれ等価であることを示せ.

問題 7 (SwA p.37, Exercise 2.17)**.** While 言語の文に `repeat` S `until` b を追加せよ．この文に対応する部分の構造操作的意味論を定めよ．（ただし，既存の `while` 文を用いて `repeat` 文を構築してはいけない.）

問題 8 (SwA p.39, Exercise 2.20)**.** $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$ と仮定する．必ずしも $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ でないことを示せ.

問題 9 (SwA p.39, Exercise 2.21)**.** $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$ なら $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$ であることを示せ．つまり，S_1 の実行がその後の文の影響を受けないことを示せ.

問題 10 (SwA p.40, Exercise 2.24)**.** 上で定義された `repeat` S `until` b が $S;$`while not`(b) `do` S と意味論に等価であることを示せ.

問題 11 (SwA p.41, Exercise 2.25)**.** $\mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![S_1]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![S_2]\!]$ であることと S_1 と S_2 が意味論的に等価であることの関係を示せ.

問題 12 (SwA p.45, Exercise 2.29)**.** `repeat` S `until` b を拡張した言語の自然意味論と構造操作的意味論が等価であること，すなわち任意の拡張 While 言語の文 S に対して

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![S]\!]$$

であることを示せ.