

## 2 自然意味論と構造操作的意味論

ちなみにこの回の問題は、デンマーク工科大学における学部学生対象の英語の授業の1週間分の Exercise を訳した問題である（授業が3時間、時間外学習が8時間）。

問題 4 (SwA p.26, Exercise 2.4). 次の文を考える.

1. `while not(x=1) do (y:=y*x; x:=x-1)`
2. `while 1<=x do (y:=y*x; x:=x-1)`
3. `while true do skip`

各文が常に停止するか、常にループするかに答えなさい。公理や規則を用いてなぜその答えになるか説明しなさい。

ヒント：

1. 「公理や規則を用いて」と「説明しなさい。」という指示がある問題であることに注意しなさい。
2. 1, 2, 3 の文それぞれについて常に停止するか考えなさい。1, 2, 3 の文それぞれについて常にループするかを考えなさい。
3. 常に停止するの否定が何かを考えなさい。常にループするの否定が何かを考えなさい。
4. 1 は  $s \ x = 1$  の場合と  $s \ x = 0$  の場合を考えなさい。
5. 「常に停止する」を示すために「 $s \ x = 1$  の場合」を示すだけでは不十分である。

解答例. `while not(x=1) do (y:=y*x; x:=x-1)` は常に停止するとは限らず、常にループするとは限らない。  $s \ x = 1$  の場合、公理  $\text{while}_{\text{ns}}^{\text{ff}}$  より  $\langle \text{while not}(x=1) \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s \rangle \rightarrow s$  である。したがって、常にループするとは限らない。また、 $s \ x = k < 0$  の場合を考える。このとき、導出木の根は

$$\text{while}_{\text{ns}}^{\text{tt}} \frac{\langle y:=y*x; x:=x-1, s \rangle \rightarrow s' \quad \langle \text{while not}(x=1) \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s' \rangle \rightarrow s''}{\langle \text{while not}(x=1) \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s \rangle \rightarrow s''}$$

とならねばならず、このとき  $s' \ x = k-1$  である。  $k-1 < 0$  であるので、右上の前提  $\langle \text{while not}(x=1) \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s' \rangle$  においても繰返しの本体が実行されるたびに  $x$  の値が1ずつ減っていく。このように  $x$  の値は単調減少をしていき、公理  $\text{while}_{\text{ns}}^{\text{ff}}$  を適用するための前提条件が満たされることはない。したがって、常に停止するとは限らない。

`while 1<=x do (y:=y*x; x:=x-1)` は常に停止する（ループすることは無い）。  $s \ x = k \leq 0$  の場合、公理  $\text{while}_{\text{ns}}^{\text{ff}}$  より  $\langle \text{while } 1 \leq x \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s \rangle \rightarrow s$  である。したがって、停止する。  $s \ x = k \geq 0$  の場合、自然数  $k$  に対する帰納法を用いて  $s' \ x = k$  となる状態  $s'$  の下で `while 1<=x do (y:=y*x; x:=x-1)` が停止することを証明する。  $k = 0$  のとき自明である。  $k \geq 1$  のとき導出木の根は

$$\text{while}_{\text{ns}}^{\text{tt}} \frac{\langle y:=y*x; x:=x-1, s \rangle \rightarrow s' \quad \langle \text{while } 1 \leq x \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s' \rangle \rightarrow s''}{\langle \text{while } 1 \leq x \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s \rangle \rightarrow s''}$$

とならねばならず, このとき  $s' \ x = k-1$  である. 帰納法の仮定より右上の  $\langle \text{while } 1 \leq x \text{ do } (y:=y*x; x:=x-1), s' \rangle \rightarrow s''$  を根とする導出木が存在する. したがって, 停止する.

`while true do skip` は常にループする (常に停止しない). 任意の状態  $s$  に対して `while true do skip` を根にもつ導出木は, 状態  $s'$  が存在して

$$\text{while}_{\text{ns}}^{\text{tt}} \frac{\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s \quad \langle \text{while true do skip}, s \rangle \rightarrow s'}{\langle \text{while true do skip}, s \rangle \rightarrow s'}$$

とならねばならない. しかし根と右上の前提が同じ形をしており, このような導出木は存在しない. したがって `while true do skip` は常にループする. □