# 3 続 操作的意味論
# 解答例

最終更新 2020/06/02

以下はデンマーク工科大学における学部学生対象の英語の授業の 1 週間分の Exercise を訳した問題である（授業が 3 時間，時間外学習が 8 時間）．

問題 **1** (SwA p.49, Exercise 3.1)**.** 定理 2.26 は While 言語の自然意味論と構造操作的意味論は等価であることを述べている．`abort` を拡張した While 言語においても同等の結果が成り立つか論ぜよ．

※定理 2.26 は「2b. 構造操作的意味論」のスライド中にも掲載されている．

解答例．p.48 のように **While** の構文に文 `abort` を追加する：

$$S ::= x := a \mid \texttt{skip} \mid S_1;\ S_2 \mid \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2 \mid \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S \mid \texttt{abort}$$

拡張した言語を $\textbf{While}^{\texttt{abort}}$ とよぶことにする．

補題 2.27(p.42) に対応する補題を考える：$\textbf{While}^{\texttt{abort}}$ の任意の文 $S$ と状態 $s, s'$ に対して，

$$(\langle S, s\rangle \to s') \Longrightarrow (\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s')$$

この補題の証明は導出木の構造に関する帰納法で示せる．導出木の根に文 `abort` 以外がある場合は補題 2.27 と同様にして示される．導出木の根に文 `abort` がある場合，$(\langle \texttt{abort}, s\rangle \to s')$ となる状態 $s, s'$ は存在しない．したがって，前提が満たされることが無いので $(\langle \texttt{abort}, s\rangle \to s') \Longrightarrow (\langle \texttt{abort}, s\rangle \Rightarrow^* s')$ は成り立つ．

同様にして，補題 2.28(p.43) に対応する補題を考える：$\textbf{While}^{\texttt{abort}}$ の任意の文 $S$ と状態 $s, s'$ と自然数 $k$ に対して，

$$(\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s') \Longrightarrow (\langle S, s\rangle \to s')$$

この補題の証明は導出列の長さに関する帰納法で示せる．この補題の証明においても $S$ が文 `abort` である場合，前提が満たされることが無いので，$(\langle \texttt{abort}, s\rangle \Rightarrow^k s') \Longrightarrow (\langle \texttt{abort}, s\rangle \to s')$ が成り立つ．

したがって，$\textbf{While}^{\texttt{abort}}$ に対して p.41 の定理 2.26 と同等の定理が成り立つ：$\textbf{While}^{\texttt{abort}}$ の任意の文 $S$ に対して，$\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![S]\!]$ である． □

※（導出木の高さと導出列の長さに関する）帰納法で示すところをよく押さえておくこと．

問題 **2** (SwA p.51, Exercise 3.3)**.** 文 `x := -1; while x<=0 do (x := x-1 or x := (-1)*x)` を考えよ．状態が与えられたとき自然意味論で得られる最終結果を記せ．また，構造操作的意味論で定まる導出列を示せ．これらの結果を踏まえ，この文について自然意味論と構造操作的意味論が等価であると見なすことができるかを論ぜよ．

解答例．$s_i = [\texttt{x} \mapsto i]$ とする[*1]．`while x<=0 do (x := x-1 or x := (-1)*x)` を $w$ と置く．

$i \leq 0$ である場合，計算状況 $\langle w, s_i\rangle$ が根にある導出木は

$$\mathrm{WHILE}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ns}}\ \dfrac{\mathrm{OR}^{2}_{\mathrm{ns}}\ \dfrac{\langle \texttt{x := (-1)*x}, s_i\rangle \to s_{-i}}{\langle \texttt{x := x-1 or x := (-1)*x}, s_i\rangle \to s_{-i}} \qquad \mathrm{WHILE}^{\mathrm{ff}}_{\mathrm{ns}}\ \dfrac{}{\langle w, s_{-i}\rangle \to s_{-i}}}{\langle w, s_i\rangle \to s_{-i}}$$

もしくは

$$\mathrm{WHILE}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ns}}\ \dfrac{\mathrm{OR}^{1}_{\mathrm{ns}}\ \dfrac{\langle \texttt{x := x-1}, s_i\rangle \to s_{i-1}}{\langle \texttt{x := x-1 or x := (-1)*x}, s_i\rangle \to s_{i-1}} \qquad \mathrm{WHILE}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ns}}\ \dfrac{\vdots}{\langle w, s_{i-1}\rangle \to s_j}}{\langle w, s_i\rangle \to s_j}$$

のいずれかである．ここで 2 番目の導出木の右上の $\vdots$ にはこのいずれかの導出木が現れる．よって，可能な導出木は 2 番目の形が 0 回以上積み上げられて最上部に 2 番目の導出木が現れたものである．2 番目の導出木の左上の前提では `x` の値が 1 つ減分される．1 番目の導出木の結論では `x` の値の符号が反転される．したがって，与えられた文に対して自然意味論で得られる最終結果は，2 番目の導出木の形がそれぞれ $0, 1, 2, \ldots$ 回ずつ繰り返された $s_1, s_2, s_3, \ldots$ である．

$i \leq 0$ である場合，計算状況 $\langle w, s_i\rangle$ に対する部分導出列は

$$\begin{aligned}
&\langle w, s_i\rangle\\
\Rightarrow&\langle \texttt{if x<=0 then (x := x-1 or x := (-1)*x)}; w\ \texttt{else skip}, s_i\rangle\\
\Rightarrow&\langle (\texttt{x := x-1 or x := (-1)*x}); w, s_i\rangle\\
\Rightarrow&\langle \texttt{x := x-1}; w, s_i\rangle\\
\Rightarrow&\langle w, s_{i-1}\rangle
\end{aligned}$$

もしくは

$$\begin{aligned}
&\langle w, s_i\rangle\\
\Rightarrow&\cdots\\
\Rightarrow&\langle (\texttt{x := (-1)*x}); w, s_i\rangle\\
\Rightarrow&\langle w, s_{-i}\rangle
\end{aligned}$$

のいずれかである．したがって，任意の状態 $s$ に対して構造操作的意味論で定まる有限導出列は以下の通りで

[*1] $[\texttt{x} \mapsto i]$ がリスト表記 (p.13) であることに注意せよ．$s_i = [\texttt{x} \mapsto i]$ は，$y \neq \texttt{x}$ であるとき，$s_i(y) = \underline{\mathrm{undef}}$ である．

ある：

$$
\begin{aligned}
&\langle \texttt{x := -1}; w, s\rangle \\
\Rightarrow&\langle w, s_{-1}\rangle \\
\Rightarrow&\langle \texttt{if x<=0 then } (\texttt{x := x-1 or x := (-1)*x}); w \texttt{ else skip}, s_{-1}\rangle \\
\Rightarrow&\langle (\texttt{x := x-1 or x := (-1)*x}); w, s_{-1}\rangle \\
\Rightarrow&\langle \texttt{x := x-1}; w, s_{-1}\rangle \\
\Rightarrow&\langle w, s_{-2}\rangle \\
\Rightarrow&\langle \texttt{if x<=0 then } (\texttt{x := x-1 or x := (-1)*x}); w \texttt{ else skip}, s_{-2}\rangle \\
\Rightarrow&\langle (\texttt{x := x-1 or x := (-1)*x}); w, s_{-2}\rangle \\
\Rightarrow&\langle \texttt{x := x-1}; w, s_{-2}\rangle \\
\Rightarrow&\cdots \\
\Rightarrow&\langle (\texttt{x := (-1)*x}); w, s_k\rangle \\
\Rightarrow&\langle w, s_{-k}\rangle
\end{aligned}
$$

また，構造操作的意味論で定まる無限導出列は上記の最後の 2 行が無いものである．

構造操作的意味論で表された無限導出列は自然意味論において対応する導出木が存在しない．よってこの文について意味論的に等価では無い． □

当日の課題について... 前回のスライドやテキストの対応するページを見て自分のことばでまとめ直せば良い．