2b. 構造操作的意味論

z:=x; x:=y; y:=z の実行

$$
\begin{array}{rr}
 & \langle \mathrm{z{:=}x;\ x{:=}y;\ y{:=}z}, \quad [\mathrm{x}\mapsto\mathbf{5},\ \mathrm{y}\mapsto\mathbf{7},\ \mathrm{z}\mapsto\mathbf{0}]\rangle \\
\Rightarrow & \langle \mathrm{x{:=}y;\ y{:=}z}, \quad [\mathrm{x}\mapsto\mathbf{5},\ \mathrm{y}\mapsto\mathbf{7},\ \mathrm{z}\mapsto\mathbf{5}]\rangle \\
\Rightarrow & \langle \mathrm{y{:=}z}, \quad [\mathrm{x}\mapsto\mathbf{7},\ \mathrm{y}\mapsto\mathbf{7},\ \mathrm{z}\mapsto\mathbf{5}]\rangle \\
\Rightarrow & [\mathrm{x}\mapsto\mathbf{7},\ \mathrm{y}\mapsto\mathbf{5},\ \mathrm{z}\mapsto\mathbf{5}]
\end{array}
$$

2つの操作的意味論

- 操作的意味論では,
  どのようにプログラムが実行されるかを扱う
- 2つの操作的意味論
  - 自然意味論（又はビッグステップ意味論）
    文と状態が与えられると（存在すれば）結果の状態を返す
  - 構造操作的意味論（又はスモールステップ意味論）
    文と状態が与えられると（存在すれば）計算の次のステップを返す

Whileの構造操作的意味論を定める

- 実行の各ステップに焦点が当てられる
- 遷移関係は次の形をしている：
  $$\langle S,s\rangle \Rightarrow \gamma$$
  ここでγは以下のどちらかの形：
  - $\gamma = \langle S', s'\rangle$ 実行途中．残りの計算は$\langle S', s'\rangle$と表される
  - $\gamma = s'$ 実行が終了し最終状態がs'である
- 構造操作的意味論 $\langle z{:=}1; x{:=}5; y{:=}2, s\rangle \Rightarrow \langle x{:=}5; y{:=}2, s[z{:=}1]\rangle$
  自然意味論 $\langle z{:=}1; x{:=}5; y{:=}2, s\rangle \rightarrow ((s[z{:=}1)[x{:=}5])[y{:=}2]$
- 構造操作的意味論 $\langle z{:=}1, s\rangle \Rightarrow s[z{:=}1]$
  自然意味論 $\langle z{:=}1, s\rangle \rightarrow s[z{:=}1]$
- 計算状況$\langle S,s\rangle$は$\langle S,s\rangle \Rightarrow \gamma$となる$\gamma$が無い場合行き詰まったという

【参考】Whileの自然意味論

$$[\text{ass}_{\text{ns}}] \qquad \langle x := a,\ s\rangle \to s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

$$[\text{skip}_{\text{ns}}] \qquad \langle \texttt{skip},\ s\rangle \to s$$

$$[\text{comp}_{\text{ns}}] \qquad \frac{\langle S_1,\ s\rangle \to s',\ \langle S_2,\ s'\rangle \to s''}{\langle S_1;S_2,\ s\rangle \to s''}$$

$$[\text{if}^{\text{tt}}_{\text{ns}}] \qquad \frac{\langle S_1,\ s\rangle \to s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \to s'} \quad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\text{if}^{\text{ff}}_{\text{ns}}] \qquad \frac{\langle S_2,\ s\rangle \to s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \to s'} \quad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

$$[\text{while}^{\text{tt}}_{\text{ns}}] \qquad \frac{\langle S,\ s\rangle \to s',\ \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s'\rangle \to s''}{\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \to s''} \quad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\text{while}^{\text{ff}}_{\text{ns}}] \qquad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \to s \text{ if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

Whileの構造操作的意味論

$$[\mathrm{ass_{sos}}] \qquad \langle x := a,\ s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

$$[\mathrm{skip_{sos}}] \qquad \langle \mathtt{skip},\ s\rangle \Rightarrow s$$

$$[\mathrm{comp^1_{sos}}] \qquad \frac{\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1',\ s'\rangle}{\langle S_1;S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1';S_2,\ s'\rangle}$$

$$[\mathrm{comp^2_{sos}}] \qquad \frac{\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1;S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_2,\ s'\rangle}$$

$$[\mathrm{if^{tt}_{sos}}] \qquad \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1,\ s\rangle \text{ if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\mathrm{if^{ff}_{sos}}] \qquad \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_2,\ s\rangle \text{ if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

$$[\mathrm{while_{sos}}] \qquad \langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S,\ s\rangle \Rightarrow$$
$$\langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (S;\ \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S)\ \mathtt{else}\ \mathtt{skip},\ s\rangle$$

導出列

- 状態sから始まる文Sの導出列は以下のいずれか：
  - 有限の列$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$（$\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_k$ と書く）でγ_kが最終状態であるか行き詰まった計算状況
  - 非有限の列$\gamma_0, \gamma_1, \ldots$（$\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \ldots$ と書く）

  ただし$\gamma_0 = \langle S, s \rangle$かつ$0 \leqq i (< k)$に対して$\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$

- i導出ステップ: $\gamma_0 \Rightarrow^i \gamma_i$
- 有限回の導出ステップ: $\gamma_0 \Rightarrow^* \gamma_i$

if文の規則

$$[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{sos}}] \qquad \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1,\ s\rangle \text{ if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\mathrm{if}^{\mathrm{ff}}_{\mathrm{sos}}] \qquad \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_2,\ s\rangle \text{ if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

- まずbの値によってどちらの規則を使うかを決める
- 別の方法：まずbの値によって決まる節を1ステップ実行する.

$$\frac{\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow s'} \text{ if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

bの値がffのときも同様

$$\frac{\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1',\ s'\rangle}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1',\ s'\rangle} \text{ if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

while文の規則

$$[\text{while}_{\text{sos}}] \qquad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \Rightarrow$$
$$\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ (S;\ \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S)\ \texttt{else}\ \texttt{skip},\ s\rangle$$

- １回ループを展開する
- 注意：while b do S と if b then (S; while b do S) else skipは自然意味論で意味的に等価
- 別の方法：bの値によって展開するかを決める

$$\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \Rightarrow \langle S; \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \Rightarrow s \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

練習問題

- 記法：s_{ij} x ＝ i かつ s_{ij} y ＝ j とする．例． s_{30}=[x:=3,y:=0]
- 次の計算状況からの導出列を構築せよ：<y:=1;while¬(x=1)do(y:=y*x;x:=x－1), s30>
  - s= y:=y*x;x:=x－1, w= while¬(x=1)do s とおく．

$$<y:=1;w,\ s_{30}> \Rightarrow$$
$$<w,\ s_{31}> \Rightarrow$$
$$<\text{if } \neg(x=1) \text{ then } s;w \text{ else skip}, s_{31}> \Rightarrow$$
$$<s;w, s_{31}> \Rightarrow$$
$$<x:=x-1;w, s_{33}> \Rightarrow$$
$$<w, s_{23}> \Rightarrow$$
$$<\text{if } \neg(x=1) \text{ then } s;w \text{ else skip}, s_{23}> \Rightarrow$$
$$<s;w, s_{23}> \Rightarrow$$
$$<x:=x-1;w, s_{26}> \Rightarrow$$
$$<w, s_{16}> \Rightarrow$$
$$<\text{if } \neg(x=1) \text{ then } s;w \text{ else skip}, s_{16}> \Rightarrow$$
$$<\text{skip}, s_{16}> \Rightarrow$$
$$s_{16}$$

意味論の性質

自然意味論と構造操作的意味論

- 共通する概念
  - 停止性
  - ループ
  - 意味的等価性
  - 決定性
- 異なる形式化

停止性

- 自然意味論
  状態sからの文Sの実行はs’が存在して<S,s>→s’であるときかつそのときに限り停止するという.
- 構造操作的意味論
  状態sからの文Sの実行は<S,s>からの有限導出列が存在するときかつそのときに限り停止するという.
  - <S,s>からの有限導出列が存在するとは,
    最終状態か行き詰まりであるγkが存在して$\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma k$

ループ

- 自然意味論
  状態sからの文Sの実行は<S,s>→s’であるようなs’が存在しないときかつそのときに限りループするという．
- 構造操作的意味論
  状態sからの文Sの実行は<S,s>からの無限導出列が存在するときかつそのときに限りループするという．
  - <S,s>からの無限導出列が存在するとは，$\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_k$となる最終状態か行き詰まりである$\gamma_k$が存在しないこと

意味的等価性

- 自然意味論
  ２つの文S1とS2は任意の状態sとs’について
  <S1,s>→s’であるときかつそのときに限り<S2,s>→s’であるときかつそのときに限り意味的に等価であるという.
- 構造操作的意味論
  ２つの文S1とS2は任意の状態sに対して以下のときまたそのときに限り意味的に等価であるという.
  - <S1, s>⇒*γとなるときまたそのときに限り<S2, s>⇒*γ
    (γは行き詰まりと最終状態の場合のいづれか)
  - <S1, s>からの無限導出列があるときまたそのときにかぎり<S2, s>からの無限導出列がある

決定性

- 自然意味論
  意味論は任意の文Sと状態s, s', s''に対して
  $\langle S, s\rangle \rightarrow s'$かつ $\langle S, s\rangle \rightarrow s''$ ならば $s' = s''$
  であるときかつそのときに限り決定的という
- 構造操作的意味論
  意味論は任意の文Sとs, γ', γ''に対して
  $\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma'$ かつ $\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma''$ ならば $\gamma' = \gamma''$
  であるときかつそのときに限り決定的という

導出列の長さに対する帰納法

- 長さ0の全導出列に対して性質が成立することを証明する
- それ以外の全導出列に対して性質が成立することを証明する
  - たかだか長さkの全導出列に対して性質が成立することを仮定する（これを帰納法の仮定とよぶ）
  - 長さk+1の全導出列に対して性質が成立することを証明する

導出列の長さに対する帰納法を使う例

補題2.19
$\langle S1; S2, s\rangle \Rightarrow^{k} s''$ ならば，ある状態s'と自然数k1とk2が存在して

$$k = k1 + k2,\ \langle S1, s\rangle \Rightarrow^{k1} s' \text{ かつ } \langle S2, s'\rangle \Rightarrow^{k2} s''$$

である．

文の意味関数

- 文の意味は状態から状態への部分関数
  S_{sos} : Stm → (State → State)
  ※自然意味論と同様
- 定義：
  $$S_{sos}[[S]]s = \begin{cases} s' & \text{if } \langle S,s\rangle \Rightarrow^{*} s' \\ \underline{\text{undef}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

まとめ

- 構造操作的意味論
- 証明法：導出列の長さに関する帰納法

自然意味論(NS)と構造操作的意味論(SOS)の等価性

どちらのアプローチをとるか？

- どちらでも良いときがある
  - 等価であると証明できる
  - 好みによる
- 対象により使いやすい方がある
  - 使いやすい方を選ぶ
- どちらかのアプローチが巧くいかないことがある
  - 巧く行かない方を避ける

While言語に対するアプローチ

- NSとSOSは等価
- While言語を拡張した場合
  - 非決定性：両方可（しかし両者は等価で無い！）
  - 並列性：NSは不可，SOSでは問題なし
- コンパイラ，プログラム解析などのreasoning：両者が候補

等価性定理

- 意味関数

$$\mathcal{S}_{ns}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{if } \langle S,\ s\rangle \to s' \\ \underline{\text{undef}} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{if } \langle S,\ s\rangle \Rightarrow^* s' \\ \underline{\text{undef}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 定理2.26　任意のSに対して $\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![S]\!]$

証明

- 準備中

まとめ（続き）

- SOS
- 証明法：導出列の長さの帰納法
- NSとSOSの等価性