練習問題 (関数)

横山 哲郎

2021 年 4 月 14 日 (水)

問 1-4(関数の合成). 単射関数の合成は単射になることを示しなさい.

前提知識. 関数 $f{:}A \to B$ について, 任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して

$$f(a_1) = f(a_2) \ \Rightarrow \ a_1 = a_2$$

が成り立つとき f を単射という. また, 関数 $f{:}A \to B, g{:}B \to C$ に対し, 関数 $g \circ f{:}A \to C$ を $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ と定義し, f と g の合成とよぶ.

解答 1. 単射関数 $f{:}A \to B, g{:}B \to C$ を考える. 単射性の定義より

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \qquad (1)$$
$$g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2 \qquad (2)$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} & (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \\ \Rightarrow\ & g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \qquad \because \text{合成関数の定義} \\ \Rightarrow\ & f(a_1) = f(a_2) \qquad \because \text{式 } 2 \\ \Rightarrow\ & a_1 = a_2 \qquad \because \text{式 } 1 \end{aligned}$$

である. よって合成関数 $g \circ f{:}A \to C$ は単射である.

解答 2. 単射関数 $f{:}A \to B, g{:}B \to C$ を考える. 単射性の定義の対偶より

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \qquad (3)$$
$$b_1 \neq b_2 \Rightarrow g(b_1) \neq g(b_2) \qquad (4)$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} & a_1 \neq a_2 \\ \Rightarrow\ & f(a_1) \neq f(a_2) \qquad \because \text{式 } 3 \\ \Rightarrow\ & g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \qquad \because \text{式 } 4 \\ \Rightarrow\ & (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2) \qquad \because \text{合成関数の定義} \end{aligned}$$

である. 対偶命題が真であることから, 合成関数 $g \circ f{:}A \to C$ は単射である.