問 10.1(p. 137–138) p. 137 に以下のように関数の定義がある．

> f が A から B への関数であるのは，任意の $x \in A$ について $(x, y) \in f$ となる $y \in B$ があり，任意の $x \in A, y \in B, z \in B$ について $(x, y) \in f$ かつ $(x, z) \in f$ なら $y = z$ となるときである．

つまり，論理式で書くと，f が A から B への関数であるのは

$$(\forall x \in A. \exists y \in B.\ (x, y) \in f)\ \wedge\ (\forall x \in A, y, z \in B.\ (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$$

と同値である．R が関数であることから，

1. 任意の x について $(x, z) \in R$ となる $z \in A$ があり，
2. 任意の $x, z, z' \in A$ について $(x, z) \in R$ かつ $(x, z') \in R$ なら $z = z'$ となる．

同様に，S が関数であることから，

3. 任意の z について $(z, y) \in S$ となる y があり，
4. 任意の $z, y, y' \in A$ について $(z, y) \in S$ かつ $(z, y') \in S$ なら $z = z'$ となる．

1 と 3 より，任意の x について $(x, y) \in RS$ となる y がある．また，2 と 4 より任意の x, y, y' について $(x, y) \in RS$ かつ $(x, y') \in RS$ なら $y = y'$ となる．したがって RS は関数である．

以下のように式に名前を付ける．

$$R^* = \bigcup \{R^n \mid n \geq 0\} \tag{20}$$

R の反射的推移的閉包とは (1)R を含み，(2) 反射的かつ (3) 推移的な関係の中で (4) 最小のものである．R^* が R の反射的推移的閉包であることを (1)–(4) を示すことで示す．

1. R^* は R を含むこと，すなわち $R^* \supseteq R$ を示す：
   $R^* = \bigcup \{R^n \mid n \geq 0\} \supseteq R^1 = R$
2. R^* が反射的であること，すなわち任意の $x \in A$ に対して $(x, x) \in R^*$ であることを示す：
   $R^* \supseteq R^0 = \{(x, x) \mid x \in A\}$ より明らか．
3. R^* が推移性を満たすことを示す：
   $(x, y), (y, z) \in R^*$ とする．R^* の定義よりある k_1, k_2 が存在して，$(x, y) \in R^{k_1}$ かつ $(y, z) \in R^{k_2}$ である．ここで，任意の非負整数 k_1 と k_2 に対して $R^{k_1+k_2} = R^{k_1} R^{k_2}$ である．なぜなら，$k_1 = 0, 1$ のとき自明であり，$k_1 \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
R^{k_1+k_2} &= RR^{k_1+k_2-1} && \because \text{p. 140 l. 4} \\
&= R(RR^{k_1+k_2-2}) && \because \text{p. 140 l. 4} \\
&= (RR)R^{k_1+k_2-2} && \because \text{結合則} \\
&= R^2 R^{k_1+k_2-2} && \because \text{p. 140 l. 4} \\
&\vdots \\
&= R^{k_1} R^{k_2}
\end{aligned}$$

   であるからである．したがって，$(x, z) \in R^{k_1+k_2} \subseteq R^*$ である．

4. R' を R を含み反射的かつ推移的な任意の関係とし $R^* \subseteq R'$ を示す：
   任意の非負整数 n (≥ 0) に対して $R^n \subseteq R'$ を示せば十分である．n に関する帰納法で示す．
   $n = 0$ の場合を考える．R' は反射的なので $R^0 \subseteq R'$ である．
   $n = 1$ の場合を考える．R' は R を含むので，$R \subseteq R'$ である．
   $n \geq 2$ の場合を考える．帰納法の仮定より $R^{n-1} \subseteq R'$ である．また R' が反射的な R(したがって $R \supseteq \{(x,x) \mid x \in A\}$) を含む反射的な関係であることから $R'R \supseteq R'\{(x,x) \mid x \in A\} = R'$ であり，

$$\begin{aligned} R'R &\subseteq R'R' && R = R^1 \subseteq R^{n-1} \subseteq R' \\ &\subseteq R' && R' \text{ は推移的な関係} \end{aligned}$$

   であるので，$R'R = R'$ である．よって $R^n = R^{n-1}R \subseteq R'R = R'$ である．したがって $R^n \subseteq R'$ である．

練習問題 問 11.1(p. 141) 次のうちから正しいものをすべて選べ．

1. $C = A \cup B$ のとき，$C \supseteq A$ である．
2. $C = A \cup B$ のとき，$C \ni A$ である．

練習問題 問 11.1(p. 141) 2 つの集合 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ に対して，AB を求めよ．
解答例 $AB = \{14, 15, 24, 25, 34, 35\}$

問 11.1(p. 141) p. 140 の下に，Σ^* の部分集合の集合 $\mathcal{R}^n$ が定義されている：

$$\mathcal{R}^0 = \emptyset \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{n+1} = &\mathcal{R}^n \cup \{\emptyset\} \cup \{\{\epsilon\}\} \cup \{\{a\} \mid a \in \Sigma\} \cup \{R^* \mid R \in \mathcal{R}^n\} \\ &\cup \{R_1R_2 \mid R_1 \in \mathcal{R}^n, R_2 \in \mathcal{R}^n\} \cup \{R_1 \cup R_2 \mid R_1 \in \mathcal{R}^n, R_2 \in \mathcal{R}^n\} \end{aligned} \tag{22}$$

(i) $\emptyset = \mathcal{R}^0 \subseteq \bigcup\{\mathcal{R}^n \mid n \geq 0\} = \mathcal{R}$.
(ii) $\{\epsilon\} \in \mathcal{R}^1 \subseteq \bigcup\{\mathcal{R}^n \mid n \geq 0\} = \mathcal{R}$.
(iii) すべての $a \in \Sigma$ について，$\{a\} \in \{\{b\} \mid b \in \Sigma\} \subseteq \mathcal{R}^1 \subseteq \bigcup\{\mathcal{R}^n \mid n \geq 0\} = \mathcal{R}$.
(iv) $R \in \mathcal{R} = \{\mathcal{R}^n \mid n \geq 0\}$ であることから，ある k が存在して $R \in \mathcal{R}^k$ である．よって，$R^* \in \{S^* \mid S \in \mathcal{R}^k\} \subseteq \mathcal{R}^{k+1} \subseteq \{\mathcal{R}^n \mid n \geq 0\} = \mathcal{R}$ である．
(v) $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ であることから，ある k が存在して $R_1, R_2 \in \mathcal{R}^k$ である．よって，

$$R_1R_2 \in \{S_1S_2 \mid S_1 \in \mathcal{R}^k, S_2 \in \mathcal{R}^k\} \subseteq \mathcal{R}^{k+1} \subseteq \mathcal{R} \tag{23}$$

$$R_1 \cup R_2 \in \{S_1 \cup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{R}^k, S_2 \in \mathcal{R}^k\} \subseteq \mathcal{R}^{k+1} \subseteq \mathcal{R} \tag{24}$$

である．
　ある集合 A が (i) から (v) までの性質：

(i) $\emptyset \in A$
(ii) $\{\epsilon\} \in A$
(iii) すべての $a \in \Sigma$ について $\{a\} \in A$
(iv) $R \in A$ なら $R^* \in A$ である．
(v) $R_1, R_2 \in A$ なら $R_1R_2 \in A$ かつ $R_1 \cup R_2 \in A$ である．

を満たすものとする．

任意の n について $\mathcal{R}^n \subseteq A$ であることを，任意の $S \in \mathcal{R}^n$ が $S \in A$ であることを n に関する帰納法により示す．

$n = 0$ の場合．前提が空であり成り立つ．

$n = k + 1$ の場合．帰納法の仮定より，任意の $S \in \mathcal{R}^k$ が $S \in A$ である．これと上の性質 (i) から (v) より漸化式 22 の右辺の和を構成するどの集合の要素でも A に属することがいえる．よって，任意の $S \in \mathcal{R}^{k+1}$ が $S \in A$ である．

以上より，任意の n について $\mathcal{R}^n \subseteq A$ であることが示された．

（任意の n について $\mathcal{R}^n$ が離散集合であることから，）(i) から (v) までの性質を満たす任意の集合 A と任意の n について，$\mathcal{R}^n \subseteq A$ であり，したがって，$\mathcal{R} = \bigcup\{\mathcal{R}^n \mid n \geq 0\} \subseteq A$ である．この A の任意性により $\mathcal{R}$ は (i) から (v) を満たす最小の集合である．

練習問題 問 11.2 以下は高校の数学 I[1, pp. 55–] の問である．

問 62 $A = \{a, b, c\}$ のとき，A の部分集合をすべて書け．

全体集合 U の部分集合 A について，A に属さない U の要素全体の集合を，A の**補集合**といい，$\overline{A}$ で表す．すなわち，

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

問 63 $U = \{x \mid x$ は 10 以下の自然数 $\}$ を全体集合とするとき，

$$A = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 2 \text{ の倍数 } \}$$
$$B = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 3 \text{ の倍数 } \}$$

に対して，次の集合を，要素を書き並べて表せ．

(1) $\overline{A}$　　(2) $A \cap \overline{B}$　　(3) $\overline{A} \cup B$

問 64 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{A}$ が成り立つことを示せ．

問 65 12 以下の自然数の集合を全体集合 U とする．U の部分集合

$$A = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 2 \text{ の倍数 } \}$$
$$B = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 3 \text{ の倍数 } \}$$

について，要素を書き並べて，ド・モルガンの法則が成り立つことを確かめよ．

問 11.2(p. 141) 性質 (i) の証明のヒント：数学的帰納法を用いる．性質 (iv) の証明のヒント：全体集合を Σ^* として補集合を考えて，任意の集合 X $(\subset \Sigma^*)$ がその補集合の補集合 $\Sigma^* \backslash (\Sigma^* \backslash X)$ と等しいこととド・モルガンの法則を用いると良い．

性質 (i) の証明．R が正規言語であることから，p. 140 の性質 (ii) と (v) および $\cdot^n$ の定義を用いた n に関する帰納法により，任意の n について R^n は正規言語である．

性質 (ii) の証明．R が正規言語であることから，p. 140 の性質 (iv) より R^* は正規言語である．よって，p. 140 の性質 (v) より，RR^* すなわち R^+ は正規言語である．

性質 (iv) の証明．R_1, R_2 が正規言語であることから，性質 (iii) より $\Sigma^* \backslash R_1$ と $\Sigma^* \backslash R_2$ が正規言語であり，

p. 140 の性質 (v) より $(\Sigma^*\backslash R_1) \cup (\Sigma^*\backslash R_2)$ は正規言語である．よって

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 &= \Sigma^*\backslash(\Sigma^*\backslash(R_1 \cap R_2)) && \because R_1 \cap R_2 \subseteq \Sigma^* \\ &= \Sigma^*\backslash((\Sigma^*\backslash R_1) \cup (\Sigma^*\backslash R_2)) && \because \text{ド・モルガンの法則} \end{aligned}$$

も性質 (iii) より正規言語である．

問 11.3(p. 141) $\epsilon \notin R$ より X の要素はある i (≥ 0) が存在して R^iS の要素のいずれかである．したがって，こうした解の和 $X = \bigcup\{R^nS \mid n \geq 0\}$ が唯一の解である．p. 140 の性質 (v) を用いた帰納法により X は正規言語であることが示される．

なお，$\epsilon \in R$ である場合は，任意の集合 X が $X = S \cup RX$ を満たす．

練習問題 例 11.2(p. 142) -1234, 3.14, $1.09E20$ が $[\![number]\!]$ の要素であることを示せ．
解答例 $-1234 \in [\![number]\!]$ であるときのみを示す．他も同様である．

$$\begin{aligned} [\![number]\!] &= [\![int]\!] \\ &= [\![sign\ digit^+]\!] \\ &= [\![sign]\!]\ [\![digit^+]\!] \\ &= [\![+ \mid - \mid \epsilon]\!]\ [\![digit]\!]^+ \\ &= ([\![+]\!] \cup [\![-]\!] \cup [\![\epsilon]\!])\ \left(\bigcup\{[\![digit]\!]^n \mid n \geq 1\}\right) \\ &\supset [\![-]\!]\ [\![digit]\!]^4 \\ &= \{-\}\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]^3 \\ &= \cdots \\ &= \{-\}\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]^0 \\ &= \{-\}\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]\ [\![digit]\!]\ \{\epsilon\} \\ &\supset \{-\}\ [\![1]\!]\ [\![2]\!]\ [\![3]\!]\ [\![4]\!]\ \{\epsilon\} \\ &= \{-1234\} \\ &\ni -1234 \end{aligned}$$

問 11.4(p. 146) w の長さに関する帰納法を用いる．
　w の長さが 0 の場合：$\hat{\delta}$ の定義から明らか．
　w の長さが 1 より大きい場合：w を aw' とする．

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(aw'v, q) &= \hat{\delta}(w'v, \delta(a, q)) && \because \hat{\delta}\text{の定義} \\ &= \hat{\delta}(v, \hat{\delta}(w', \delta(a, q))) && \because \text{帰納法の仮定} \\ &= \hat{\delta}(v, \hat{\delta}(aw', q)) && \because \hat{\delta}\text{の定義} \end{aligned}$$

　以上より題意は示された．

問 11.5(p. 146) ヒント：各状態において各終端記号による遷移を考えると良い．

問 11.6(p. 147) **問 11.5** で作成した有限状態機械に対応する相互再帰関数を作成する．

$$
\begin{aligned}
f_1(x :: L) &= f_2(L) && (x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) \\
f_1(x :: L) &= f_3(L) && (x \in \{+,-\}) \\
f_1(x :: L) &= f_8(L) && (x \in \{'.', 'E'\}) \\
f_1(nil) &= Reject \\
f_2(x :: L) &= f_2(L) && (x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) \\
f_2(x :: L) &= f_8(L) && (x \in \{+,-\}) \\
f_2('.' :: L) &= f_4(L) \\
f_2('E' :: L) &= f_5(L) \\
f_2(nil) &= Accept \\
f_3(x :: L) &= f_2(L) && (x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) \\
f_3(x :: L) &= f_8(L) && (x \in \{'.', +, -, 'E'\}) \\
f_3(nil) &= Reject \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

練習問題 問 11.7(pp. 150–151) BNF 文法

$$K ::= () \mid (K) \mid K\ K$$

で生成される構文木を OCaml のデータ型で表現せよ．

解答例 BNF 記法は「文脈自由文法を簡潔に定義する記法」(p. 144) である．上記の BNF 文法は文脈自由文法 $G_1 = (T_1, N_1, K, P_1)$ を定義している．ここで，

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \{K\} \\
T_1 &= \{(,)\} \\
P_1 &= \{K \to (), K \to (K), K \to K\ K)\}
\end{aligned}
$$

である．「各非終端記号 N をデータ型とみなし，N の各生成規則に対してデータ構成子を定義する」(p.150) ということにしたがって，非終端記号 K をデータ型とみなし，生成規則 $K \to ()$ に対してデータ構成子 `OneParen`，生成規則 $K \to (K)$ に対してデータ構成子 `Paren`，生成規則 $K \to K\ K$ に対してデータ構成子 `Apply` をそれぞれ定義する．データ `OneParen` は，K をルートノードとし，“(”-木と “)”-木を子とする K-木を表す．データ `Paren(t)` は，K をルートノードとし，“(”-木，`t` が表す K-木，および “)”-木を子とする K-木を表す．データ `Apply(t1,t2)` は，K をルートノードとし，`t1` が表す K-木と `t2` が表す K-木を子とする K-木を表す．

以上より求めるデータ型 `k` は以下の通りである．

```
type k = OneParen | Paren of k | Apply of k * k
```

(※ OCaml ではデータ型は英小文字で開始する必要がある．)

練習問題 問 11.7(pp. 150–151) **問 11.7** の BNF 文法における非終端記号をすべて記せ．

解答例 $PROGRAM$ と E の 2 つ．なお，タイプライターフォントで書かれたものはコードであることを明示しているものと思われる．

練習問題 問 11.7(pp. 150–151) **問 11.7** の BNF 文法における *id* と *int* をそれぞれ正規表現を用いて定義せよ．また，*id* と *int* はそれぞれ終端記号と非終端記号のいずれであるか.
解答例 *int* には，p. 142 **例 11.2** の定義を流用する．

$$\begin{aligned} sign &= \texttt{+} \mid \texttt{-} \mid \epsilon \\ digit &= \texttt{0} \mid \texttt{1} \mid \texttt{2} \mid \texttt{3} \mid \texttt{4} \mid \texttt{5} \mid \texttt{6} \mid \texttt{7} \mid \texttt{8} \mid \texttt{9} \\ int &= sign\ digit^{+} \end{aligned}$$

id は先頭が英小文字，2 文字目から英数字および_である 1 文字以上の文字列とする．

$$\begin{aligned} upper &= \texttt{A} \mid \cdots \mid \texttt{Z} \\ lower &= \texttt{a} \mid \cdots \mid \texttt{z} \\ alphanum &= lower \mid upper \mid digit \mid \texttt{\_} \\ id &= lower\ alphanum^{*} \end{aligned}$$

p. 143 の終端記号の定義では,「通常のプログラミング言語では T の各要素は正規表現で定義される集合を表す」とあるので *id* と *int* は両方とも終端記号である．

問 11.7(pp. 150–151) 解答は別途示す.
2020 年度に受講者がはまった点：

- Windows で環境構築が難しい → VirtualBox + Ubuntu を用いると簡単に環境が構築できる．WSL を用いると軽い.
- OCaml のインストール方法が分からない．[2] のサポートページに記載の方法のうちバイナリパッケージをとってきてインストールする方法に失敗した．→ 公式ページの情報 `https://ocaml.org/docs/install.html` を参考にすると良い．VirtualBox + Ubuntu では apt でインストールのが簡単.
- OCaml インタプリタで日本語が文字化けをおこす．[2] のサポートページに記載の方法では文字化けが直らない．→ ホームディレクトリに以下を記述した .ocamlinit を置く.

```
let print_non_escaped_string ppf = Format.fprintf ppf "\"%s\"";;
#install_printer print_non_escaped_string;;
```

- ファイルマネージャ Nautilus からダブルクリックで `*.ml` ファイルを開けない → この方法で開く必要は無い（この方法で開きたい人は「ファイルの関連付け」を調べること）
- コマンド ocaml でコンパイルできない → コマンド ocamlc でコンパイルすること
- GNU Make の使い方が分からない → [3] の 1 章だけでいいので読むこと．他の節は必要に応じて読むので良い.
- 最新の OCamlMakefile は `http://mmottl.github.io/ocaml-makefile/` から手に入る (2020/08/12 現在)
- 与えられた BNF 文法にしたがったプログラムを評価する方法が分からない → この問題では評価器を作る必要は無い
- ocamllex や ocamlyacc がよく分からない → まずはマニュアルを要チェック `https://ocaml.jp/archive/ocaml-manual-3.06-ja/manual026.html`

- 英単語：
  constructor: コンストラクタ，構成子; bind: 束縛; unbound: 束縛されていない
- LaTeX の問題．パッケージのインストール方法が分からない → tlmgr[*4]を使うのが簡単である．まず以下を理解すること．
  - パッケージ管理ツール
  - TeX Live
  - ヘルプの使い方 tlmgr –help, man tlmgr

  次に，以下のコマンドを理解した上で実行すること

  ```
  sudo tlmgr update --self --all
  sudo tlmgr install listings
  ```

  ただし，tlmgr を初めて使うときは以下のコマンドを実行する必要がある[*5]．

  ```
  sudo apt install xzdec
  tlmgr init-usertree
  ```

- apt コマンドを使っていて「E: ロック /var/lib/dpkg/lock-frontend が取得できませんでした - open (11: リソースが一時的に利用できません)」というエラーが出る → https://qiita.com/tetsuo_jp/items/9d4bbf415f3ec900b894

「Minimal でも十分プログラミング可能であるが，ML に興味のある読者は，巻末にいくつかあげる ML に関する参考文献を参照し，ML でプログラミングしてみることを勧める」とある．参考文献は [4, 5, 6, 7] である．しかし，本演習では Minimal や Standard ML ではなく OCaml でプログラミングしてみることを勧める．さらに参照する参考文献として [2] を勧める．

なお，文献 [4, 5] はオンラインで PDF を閲覧可能である．[4, 5, 6] は ML のテキストであり，[7] は OCaml の前身の Caml を使って書かれたアルゴリズムの教科書である．

問 12.1(p. 155) p. 154 の与えられたラムダ式の文法は以下の通りである：

$$
\begin{aligned}
M ::= {} & c \mid x \mid \lambda x.M \mid M\ M \mid (M, M) \mid M[1] \mid M[2] \\
& \mid 1(M) \mid 2(M) \mid (\mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ 1(x) \Rightarrow M, 2(x) \Rightarrow M) \\
& \mid \mathbf{let}\ x = M\ \mathbf{in}\ M \mid \mathbf{fix}(M)
\end{aligned}
$$

まずは曖昧なラムダ式を考えてみよう：

- $\lambda x.M\ M$ は $(\lambda x.M)\ M$ と $\lambda x.(M\ M)$
- $M\ M[1]$ は $M\ (M[1])$ と $(M\ M)[1]$
- $M\ M[2]$ は $M\ (M[2])$ と $(M\ M)[2]$

にそれぞれ解釈できる．

直前の約束 (i)–(iii) が無くてもそれぞれの約束に対応する構文構造が一意に定まるようにすればよい．具体

[*4] https://texwiki.texjp.org/?tlmgr
[*5] https://texwiki.texjp.org/?Linux%2FLinux%20Mint

的には，$\lambda x.M$, $M\ M$, $M[1]$, $M[2]$ の周りに括弧を付けると良い．したがって，求める文法は以下の通りである：

$$\begin{aligned}M ::= c \mid x \mid (\lambda x.M) \mid (M\ M) \mid (M, M) \mid (M[1]) \mid (M[2])\\ \mid 1(M) \mid 2(M) \mid (\mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ 1(x) \Rightarrow M, 2(x) \Rightarrow M)\\ \mid \mathbf{let}\ x = M\ \mathbf{in}\ M \mid \mathbf{fix}(M)\end{aligned}$$

問 12.2(p. 157) 束縛変数を含まない他の 7 つの場合は以下の赤字の部分である：

$$\begin{aligned}M ::= c \mid x \mid \lambda x.M \mid M\ M \mid (M, M) \mid M[1] \mid M[2]\\ \mid 1(M) \mid 2(M) \mid (\mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ 1(x) \Rightarrow M, 2(x) \Rightarrow M)\\ \mid \mathbf{let}\ x = M\ \mathbf{in}\ M \mid \mathbf{fix}(M)\end{aligned}$$

これらの場合の代入の定義は以下の通りである：

$$\begin{aligned}[N/x]c &= c\\ [N/x](M_1, M_2) &= ([N/x]M_1, [N/x]M_2)\\ [N/x](M[1]) &= ([N/x]M)[1]\\ [N/x](M[2]) &= ([N/x]M)[2]\\ [N/x](1(M)) &= 1([N/x]M)\\ [N/x](2(M)) &= 2([N/x]M)\\ [N/x](\mathbf{fix}(M)) &= \mathbf{fix}([N/x](M))\end{aligned}$$

問 12.3(p. 157) 場合分け構文と値の束縛構文は以下の赤字の部分である：

$$\begin{aligned}M ::= c \mid x \mid \lambda x.M \mid M\ M \mid (M, M) \mid M[1] \mid M[2]\\ \mid 1(M) \mid 2(M) \mid (\mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ 1(x) \Rightarrow M, 2(x) \Rightarrow M)\\ \mid \mathbf{let}\ x = M\ \mathbf{in}\ M \mid \mathbf{fix}(M)\end{aligned}$$

場合分け構文に対する，最も一般的な場合の規則を示す[*6]:

$$\begin{aligned}&[N/x](\mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ 1(y_1) \Rightarrow M_1, 2(y_2) \Rightarrow M_2) =\\ &\qquad \mathbf{case}\ [N/x]M\ \mathbf{of}\ 1(z_1) \Rightarrow [N/x]([z_1/y_1]M_1), 2(z_2) \Rightarrow [N/x]([z_2/y_2]M_2)\\ &\qquad\qquad (x \neq y_i, z_i \neq x, y_i \in FV(N), z_i \notin FV(M_1) \cup FV(M_2) \cup FV(N))\end{aligned}$$

$x = y_1 = y_2$ の場合：

$$[N/x](\mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ 1(y_1) \Rightarrow M_1, 2(y_2) \Rightarrow M_2) = \mathbf{case}\ [N/x]M\ \mathbf{of}\ 1(y_1) \Rightarrow M_1, 2(y_2) \Rightarrow M_2$$

残りは $x \neq y_1$ や $x \neq y_2$ や $x \in FV(N)$ がそれぞれ成り立つかで場合分けを行う．

値の束縛構文に対する規則は以下の通りである：

$$[N/x](\mathbf{let}\ y = M_1\ \mathbf{in}\ M_2) = \begin{cases}\mathbf{let}\ y = [N/x]M_1\ \mathbf{in}\ M_2 & (x = y)\\ \mathbf{let}\ y = [N/x]M_1\ \mathbf{in}\ [N/x]M_2 & (x \neq y, y \notin FV(N))\\ \mathbf{let}\ z = [N/x]M_1\ \mathbf{in}\ [N/x]([z/y]M_2) & (x \neq y, z \neq x, y \in FV(N)\ \text{かつ}\\ & \ z \notin FV(M_2), z \notin FV(N))\end{cases}$$

[*6] $x \notin A \cup B$ は x が A にも B にも属さないことを表す．

問 12.4(p. 158) 場合分け構文に対する α 同値公理は次の通りである：

$$\begin{array}{lcll}
\textbf{case } M \textbf{ of } 1(x_1) \Rightarrow M_1, 2(x_2) \Rightarrow M_2 & = & \textbf{case } M \textbf{ of } 1(y_1) \Rightarrow [y_1/x_1]M_1, 2(x_2) \Rightarrow M_2 & (y_1 \notin FV(M_1)) \\
\textbf{case } M \textbf{ of } 1(x_1) \Rightarrow M_1, 2(x_2) \Rightarrow M_2 & = & \textbf{case } M \textbf{ of } 1(x_1) \Rightarrow M_1, 2(y_2) \Rightarrow [y_2/x_2]M_2 & (y_2 \notin FV(M_2))
\end{array}$$

値の束縛構文に対する α 同値公理は次の通りである：

$$\textbf{let } x = M_1 \textbf{ in } M_2 \quad = \quad \textbf{let } y = M_1 \textbf{ in } [y/x]M_2 \qquad\qquad (y \notin FV(M_1) \cup FV(M_2))$$

問 12.5(p. 158) 先に定義したラムダ式の代入では $[\lambda x.x\ \ y/z]\lambda w.w\ \ z\ \ z$ のような代入を行うと $\lambda w.w\ (\lambda x.x\ y)\ (\lambda x.x\ y)$ となる．この結果のラムダ式は同じ束縛変数 x が 2 カ所で現れるので仮定 12.1 を満たさない．

関数適用に対する規則を以下のように変更する：

$$\begin{array}{l}
[N/x](M_1\ M_2) = [N/x]M_1\ [[y_n/x_n] \cdots [y_1/x_1]N/x]M_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (\forall i.\ y_i \notin FV([N/x]M_1) \cup BV([N/x]M_1) \cup FV(N) \cup BV(N) \cup FV(M_2) \cup BV(M_2))
\end{array}$$

ここで y_i はフレッシュであることを意図している．ラムダ式の構造に関する帰納法によって仮定 12.1 を満たすことを示せる．