

# Programming Techniques for Reversible Comparison Sorts

## 1. 研究分野

可逆コンピューティング  
ー可逆アルゴリズム

## 2. 目的

バブルソートや挿入ソートなどの比較ソートに対して、非可逆なアルゴリズムと同様の時間計算量で、ゴミ出力量が理論上の漸近的にタイトな限界となるような可逆アルゴリズムを作成する。

## 3. 背景

長さ $n$ の配列をソートする可逆アルゴリズムにおいては、必要な中間・最終ゴミ出力量は理論上 $\Theta(n \log n)$ にできることが知られている。しかし、埋め込み法などの一般解法を使用して非可逆なソートアルゴリズムを可逆アルゴリズムに変換する限りでは、中間・最終ゴミ出力量はこれに当てはまらない。この論文では、アルゴリズムの特性に適した手法を用いて、非可逆ないくつかの比較ソートアルゴリズムに対して、時間計算量の効率が良く、中間・最終ゴミ出力量が理論上の限界となる可逆アルゴリズムを提案した。

なぜ $\Theta(n \log n)$ ?

ー長さが2以上の $n$ 個の配列は、順番を入れ替えると元の順番が分からなくなる。そのため、可逆計算においては、配列の順番を保存する必要がある。保存には $n!$ あればよく、 $n!$ はバイナリ表現では $\log_2 n! = \Theta(n \log n)$  ビット必要である。

## 4. アプローチ

1. 非可逆なアルゴリズムをシミュレーションした可逆アルゴリズムに、「忠実」と「衛生」の概念を与える。
  - ー「忠実」(faithful) : 以下の条件を満たす可逆アルゴリズム
    - ・ゴミ出力量は $g(x)$ 以下である( $x$ は入力)
    - ・変換前のアルゴリズムと同じ時間計算量である
    - ・変換前のアルゴリズムの空間計算量を超えるスペースはゴミ操作のためである
  - ー「衛生」(hygienic) : 以下の条件を満たす可逆アルゴリズム
    - ・ゴミ出力量が最適可されている(ソートアルゴリズムでは $\Theta(n \log n)$ )
    - ・変換前のアルゴリズムと時間計算量を超えない
2. 以下の比較ソートに対して、中間・最終ゴミ出力量が「衛生」的に最適なアルゴリズムを様々な手法を用い作成する。
  - ・バブルソート
  - ・挿入ソート
  - ・選択ソート
  - ・マージソート
  - ・クイックソート

## 5. 結果

- ・バブルソート
  - 埋め込み法：忠実、ゴミ出力 $\Theta(n^2)$
  - 計算・コピー・逆計算法：忠実、最終ゴミ $O(nk)$ 、中間ゴミ $\Theta(n^2)$   
k=配列要素のビットサイズ
  - identity permutation法：埋め込み方\*2、最終ゴミ $\Theta(n \log n)$ 、中間ゴミ $O(n^2)$
  - コード共有法：衛生
- ・挿入ソート
  - 埋め込み法：忠実、ゴミ出力 $O(n^2)$
  - 計算・コピー・逆計算法：忠実、ゴミ出力 $O(n^2)$
  - identity permutation法：忠実、ゴミ出力 $O(n^2)$
  - Permutations as Intermediate Garbage法：衛生
  - Factorial Representation as Garbage法：衛生
- ・選択ソート：衛生
- ・マージソート：衛生
- ・クイックソート：忠実、衛生

## 6. 有用性

ゴミ出力量・メモリ使用量が重視される分野が存在する。そのような分野において、理論上最小の空間計算量・ゴミ出力量であるアルゴリズムは有用である。

また、各アルゴリズムで用いた可逆プログラミング特有の手法は、比較ソート以外でも用いることができると考えられる。

## 7. 限界・短所

## 8. 次に何を読めばいいか？

- ・ゴミ出力量・メモリ使用量を削減する必要性が示されている論文
  - Axelsen, H.B., Thomsen, M.K.: Garbage-free reversible integer multiplication with constants of the form  $2k \pm 2l \pm 1$ . In: Gluck, R., Yokoyama, T. (eds.) RC 2012. LNCS, vol. 7581, pp. 171–182. Springer, Heidelberg (2013)
  - Perumalla, K.S.: Introduction to Reversible Computing. CRC Press, Boca Raton (2013)